Corrigé du DM n°16

Étude d'une application linéaire $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (y+z,\ x+y+z,\ x) \end{cases}$

1) Image par f de la base canonique, et matrice A associée.

Par définition de f, on a : $f(1,0,0) = (0,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,1,0)$ et $f(0,0,1) = (1,1,0)$,

donc $\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \mathcal{C} \text{ désigne la base canonique de } \mathbf{R}^3.}$

2) Étude de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

$*$ On trouve $\mathrm{Ker}(f)$ en résolvant l'équation $f(u) = 0$, soit $f(x,y,z) = (0,0,0)$.

On trouve immédiatement : $\begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,y,-y) \in \mathbf{R}^3,\ y \in \mathbf{R}\} = \{y(0,1,-1),\ y \in \mathbf{R}\}$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(0,1,-1).}$

$*$ D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 1 = 2$.
Les images par f des deux premiers vecteurs de la base canonique appartiennent par définition à $\mathrm{Im}(f)$, et ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de cardinal 2 de $\mathrm{Im}(f)$.

Mais puisque $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, alors c'est une base. Ainsi : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((0,1,1),(1,1,0)\big).}$

$\mathrm{Ker}(f) \neq \{(0,0,0)\}$ donc f n'est pas injective. $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbf{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

3) Une nouvelle base de $\mathbf{R}^3$.
Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$ dans la base canonique : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons le rang de P :

$$\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ \boxed{1} & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ \boxed{1} & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ \boxed{1} & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$\mathrm{rg}(P) = 3$ donc P est inversible, donc $\boxed{\mathcal{B} = (u,v,w) \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

4) Calcul de $f(\mathcal{B})$.

$f(u) = f(0,-1,1) = (0,0,0) = 0_{\mathbf{R}^3}$
$f(v) = f(1,0,-1) = (-1,0,1) = -v$
$f(w) = f(2,3,1) = (4,6,2) = 2w$

5) Matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

Par définition, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice obtenue en écrivant (en colonnes) les coordonnées de $f(u), f(v)$ et $f(w)$ dans la base (u,v,w).

D'après la question précédente, on trouve : $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(0,-1,2).}$

6) Puissances successives de A'.

A' est diagonale, donc : $\boxed{(A')^n = \mathrm{Diag}(0^n, (-1)^n, 2^n).}$

Remarques : $0^n = 0$ sauf quand $n = 0$, et $(-1)^n = 1$ si n est pair, et $(-1)^n = -1$ si n est impair.

7) Formule de changement de bases.

D'après le cours, on a : $\boxed{A' = P^{-1}AP.}$

8) Expression de A^n.

D'après la question précédente, on a : $A = PA'P^{-1}$.
Une récurrence immédiate montre alors que : $\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = P\big(A'\big)^n P^{-1}$.

On doit donc calculer l'inverse de P (ce qu'on aurait pu faire à la question **3**)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\cdots \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \boxed{1} & -1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\cdots \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \quad \text{donc } P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue enfin le calcul de $P\,\mathrm{Diag}(0^n, (-1)^n, 2^n)P^{-1}$, et on trouve :

$$\boxed{A^0 = I_3 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \beta_n \\ \gamma_n & \gamma_n & \gamma_n \\ \delta_n & \varepsilon_n & \varepsilon_n \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \alpha_n = 4(-1)^n + 2^{n+1} \\ \beta_n = 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ \gamma_n = 3.2^n \\ \delta_n = 4(-1)^{n+1} + 2^n \\ \varepsilon_n = 2(-1)^n + 2^n \end{cases}}$$

Application pour $n = 6$: on calcule $\alpha_6 = 4 + 2^7 = 132$, $\gamma_6 = 3.2^6 = 192$, $\delta_6 = -4 + 2^6 = 60$.
Il est inutile de calculer β_6 et ε_6...

On a alors : $\boxed{f^6(1,0,0) = (\frac{132}{6}, \frac{192}{6}, \frac{60}{6}) = (22, 32, 10).}$

9) Script informatique

```
def composee(u,n) :
    (x,y,z) = u
    for _ in range(n) :
        x1 = y+z
        y1 = x+y+z
        z1 = x
        (x,y,z) = (x1,y1,z1)
    return (x,y,z)
```

On peut vérifier que `>>> composee([1,0,0],6)` renvoie bien `[22,32,10]`.