Exercice 1 : Donner sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z_1 = (2-3i)(3+i)$
2. $z_2 = (7+i)^2$
3. $z_3 = (2-i)(2+i)$
4. $z_4 = (3-2i)^4$
5. $z_5 = \dfrac{1}{2-i}$
6. $z_6 = \dfrac{-1+2i}{2-3i}$
7. $z_7 = \dfrac{3+6i}{3-4i}$
8. $z_8 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$

Exercice 2 : Écrire sous forme trigonométrique les complexes suivants :

1. $z_1 = 20$
2. $z_2 = -7$
3. $z_3 = 7i$
4. $z_4 = 3-3i$
5. $z_5 = -\sqrt{3}+i$
6. $z_6 = \sqrt{6}+3i\sqrt{2}$
7. $z_7 = \dfrac{4}{1+i}$
8. $z_8 = -5e^{3i\pi/10}$

Exercice 3 : On considère les complexes

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_3 = \sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{6}}.$$

Donner la forme trigonométrique, puis la forme algébrique de complexes $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$ et $(z_2)^2$.

Exercice 4 : Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z_1 = (\sqrt{3}+i)^5$
2. $z_2 = \dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$
3. $z_3 = (\sqrt{2}-e^{i\pi/4})^{15}$

Exercice 5 : On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Écrire les nombres suivants sous forme algébrique.

1. $z_1 = j^3$
2. $z_2 = j^2+j+1$
3. $z_3 = (j-1)(j^2-1)$
4. $z_4 = (1+j)^3$
5. $z_5 = (1-j)^3$

Exercice 6 : La méthode de l'arc médian est une astuce consistant à écrire, pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) \quad \text{et} \quad e^{i\alpha}-e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right).$$

1. Vérifier les formules ci-dessus.

On considère maintenant les nombres complexes :

$$A = e^{i\pi/3}+e^{i\pi/4} \quad ; \quad B = e^{2i\pi/3}-i \quad ; \quad C = 1+e^{7i\pi/6} \quad ; \quad D = 1-e^{3i\pi/4}.$$

2. À l'aide de la méthode de l'arc médian, trouver l'écriture des nombres A, B, C, D sous forme trigonométrique.
3. Écrire les nombres A, B, C, D sous forme algébrique et calculer leurs modules.
4. Déduire des différentes écritures de A une formule explicite pour $\cos(\pi/24)$, puis pour $\sin(\pi/24)$.

Exercice 7 :

1. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1+i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_2}{z_1}.$$

2. a. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

   b. En déduire sans calcul supplémentaire $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 8 : Soit u et v sont deux nombres complexes. Montrer que : $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2\left(|u|^2+|v|^2\right)$.

Exercice 9 : Soit z un nombre complexe. Montrer que :

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = 1/z.$$

Exercice 10 : Soit z et z' deux complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$.
Montrer que le nombre $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $\sin x + \cos x + 1 = 0$.

Exercice 12 : Linéariser les expressions suivantes :

1. $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$
2. $\sin^4(x)$
3. $\sin^5(x)$
4. $\sin^2(x)\cos^2(x)$
5. $\cos^3(x)\sin(2x)$
6. $\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)$

Exercice 13 : Soit $x \in \mathbf{R}$.

1. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.
3. Exprimer $\sin(6x)$ comme produit de $\sin(x)$ et d'un terme ne dépendant que de $\cos(x)$.

Exercice 14 : Déterminer les racines réelles ou complexes des expressions :

1. $P(x) = x^2 - 4x + 6$.
2. $Q(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Exercice 15 : Déterminer pour chacun des systèmes suivants les couples, réels ou complexes, solutions de :

$$(S_1)\begin{cases} x+y=1 \\ xy=2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2)\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=1 \end{cases}$$

Exercice 16 : Dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ du plan, on définit les points A,B,C par leurs coordonnées : $A(2,1),\ B(5,1),\ C(8,1)$.

Soient α,β,γ les angles : $\alpha = \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OA}\right),\ \beta = \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OB}\right),\ \gamma = \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OC}\right)$.

Montrer que : $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{4}$.