Exercice 1 : Déterminer la somme de tous les multiples de 3 compris entre 5 et 107.

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = u_{2n}$.
   Déterminer la nature de la suite (v_n). En déduire la valeur de la somme $u_2 + u_4 + \cdots + u_{14}$.

Exercice 3 : Donner la formule explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies de la manière suivante :

1. $u_2 = 3, \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = u_n - 1.$
2. $u_0 = 2, \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n.$
3. $u_1 = 2, \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n.$
4. $u_0 = 1, \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = -u_n + 5.$

Exercice 4 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{5}, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = -\dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{3}.$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer la somme des n premiers termes de (u_n) en fonction de n.

Exercice 5 : Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbf{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 + v_n}$.

1. Montrer que pour tout entier n, v_n existe et $v_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ est arithmétique.
3. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Exercice 6 : Soit $a > 0$. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$u_1 > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = a u_n^2 \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n).$$

1. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et qu'elle est arithmético-géométrique.
2. Déterminer l'expression de (u_n) en fonction de n, de a et de u_1.

Exercice 7 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4 + x}{1 + x}$, et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions ℓ_1 et ℓ_2 telles que $\ell_1 < \ell_2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et strictement positive.
3. On pose $v_n = \dfrac{u_n - \ell_2}{u_n - \ell_1}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 8 : Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$:

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = -u_n + n + 1.$$

1. Déterminer une suite arithmétique (a_n) vérifiant la relation $(\mathcal{R})$.
2. Montrer qu'une suite (u_n) vérifie $(\mathcal{R})$ si, et seulement si, la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - a_n$ est géométrique de raison -1.
3. En déduire toutes les suites de $\mathcal{E}$.

Exercice 9 : Donner la forme générale des suites (u_n) qui vérifient :

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$.
3. $\forall n \in \mathbf{N}$, $4u_{n+2} = u_n$.

Déterminer dans tous les cas l'unique suite vérifiant de plus $u_0 = u_1 = 1$.

Exercice 10 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1, \quad u_1 = e \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1}(u_n)^2.$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n > 0$.
2. Soit alors (v_n) la suite définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout entier n.
   a. Quelle relation de récurrence la suite (v_n) vérifie-t-elle ?
   b. En déduire une expression de v_n puis une expression de u_n en fonction de n.