

Corrigé du DM n°1

Étude de $x \mapsto \frac{e^x}{x-1}$

1) Ensemble de définition : $\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

2) Dérivabilité de f : Par opérations sur des fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathcal{D}$.

3) Expression de la dérivée : $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x \times 1}{(x-1)^2}$

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

4) Limites :

Par opérations, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^- \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

$\forall x \in \mathcal{D}, x \neq 0, f(x) = \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$ et par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

donc par opérations : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5) Tableau de variations :

On étudie le signe de $f'(x)$, sachant que $e^x > 0$ pour tout réel x :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-2$	-		0	+
$(x-1)^2$	+	0	+	+
$f'(x)$	-		0	+

On en déduit le tableau de variations de f :

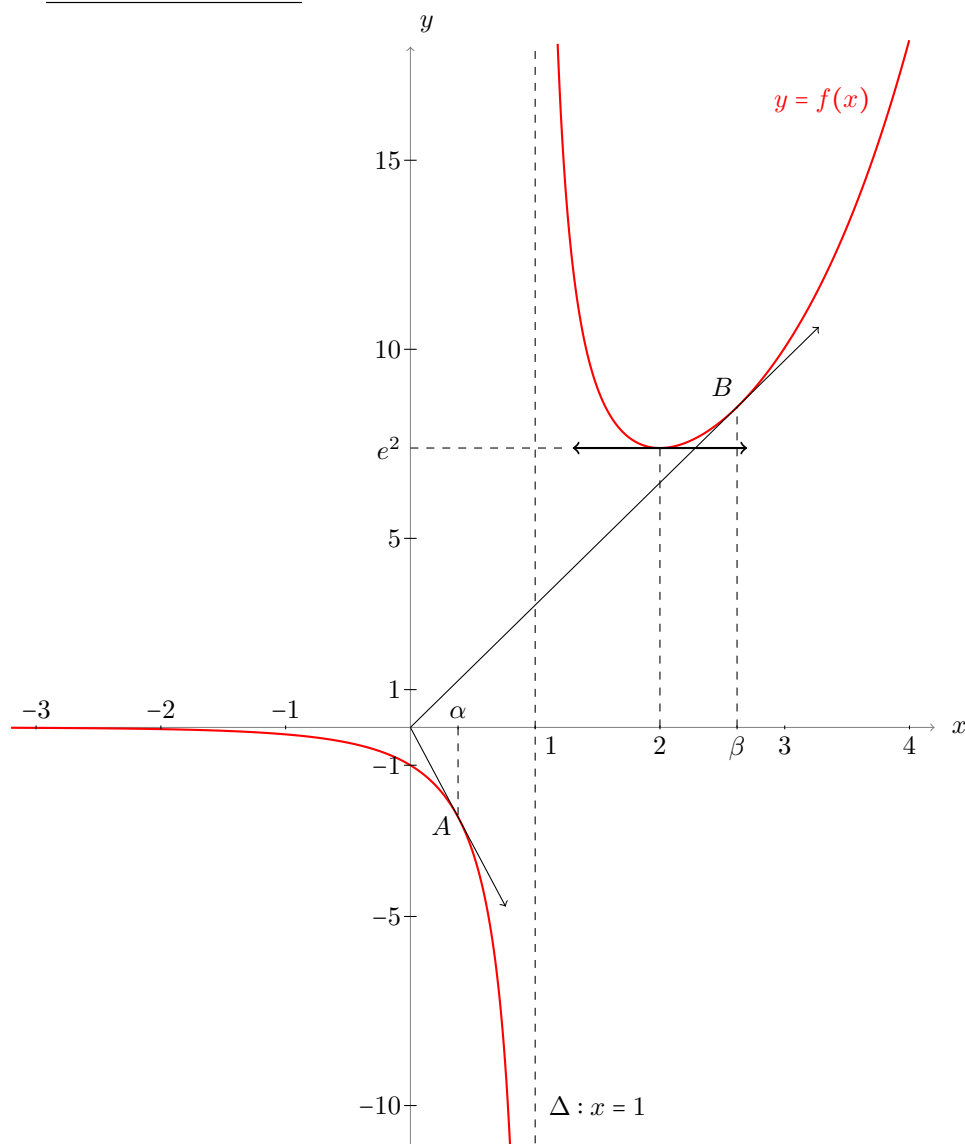
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	+
f	0 $\searrow$	$+\infty$ $\searrow$	e^2 $\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$		

f admet donc un minimum relatif $f(2) = e^2$ atteint quand $x = 2$.

6) Asymptotes : D'après la **question 4**, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet :

- une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) quand $x \rightarrow -\infty$
- une asymptote verticale Δ d'équation $x = 1$ quand $x \rightarrow 1^-$ ou $x \rightarrow 1^+$

7) Courbe représentative :



8 à 10) Tangentes passant par l'origine :

Soit $a \in \mathcal{D}$. On sait que l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ en a admet pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Cette droite passe par l'origine du repère si et seulement si : $0 = f'(a)(0-a) + f(a)$

$$\text{soit : } \boxed{f(a) = a \cdot f'(a)}$$

$$\text{On résout cette équation : } f(a) = a f'(a) \Leftrightarrow \frac{e^a}{a-1} = a \times \frac{e^a (a-2)}{(a-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow a-1 = a(a-2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = 5 > 0$ donc on a deux solutions distinctes :

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc deux tangentes passant par l'origine : en α et en β .

On trace ces tangentes en utilisant les points $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(\beta, f(\beta))$: ce sont les droites (OA) et (OB) .