

Exercices "élémentaires"

1. Résoudre dans \mathbf{R} l'inéquation : $2x + 3 \geq \frac{1}{x+1}$.
2. Résoudre dans \mathbf{R} l'inéquation : $\sqrt{2x^2 + 5x - 3} \leq x + 3$
3. Résoudre dans \mathbf{R} l'inéquation : $\frac{4x+5}{x^2-2x-8} \geq -1$.
4. Soit la fonction f d'expression : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$.
Faire l'étude complète de la fonction f .
Préciser l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f .
Dans un repère adapté, donner l'allure de la courbe représentative de f .
5. On considère la fonction f d'expression : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{x+2}$.
 - (a) Dresser le tableau de variations complet de f sur son ensemble de définition \mathcal{D} .
 - (b) Montrer que : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = x + \frac{9}{x+2}$.
 - (c) En déduire l'équation d'une asymptote oblique à la courbe \mathcal{C} représentative de f en $\pm\infty$.
 - (d) Tracer schématiquement la courbe \mathcal{C} .
6. Soit la fonction f définie par : $f(x) = e^x - 2x - 1$.
 - (a) Faire l'étude complète de f .
On montrera que f admet un minimum m égal à $1 - 2\ln(2)$.
 - (b) Préciser l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0.
 - (c) Tracer schématiquement cette courbe (on donne $m \approx -0,4$)
7. Soit f la fonction définie par son expression : $f(x) = \ln(x) + x^2 - 3x + 2$.
 - (a) Étudier la fonction f .
 - (b) Représenter graphiquement l'allure de sa courbe représentative.
 - (c) Justifier que : $\ln(2) < \frac{3}{4}$.
8. Soit une fonction f dont l'ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0.
Soit $u : \begin{cases} D \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{cases}$. Montrer que u est une fonction bien définie, et qu'elle est paire.
9. Soit une fonction f dont l'ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0.
Soit $u : \begin{cases} D \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$. Montrer que u est une fonction bien définie, et qu'elle est impaire.
10. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x^2 - 7x - 4}{2-x}}$.
Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
11. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{3x}$.
Étudier la fonction f .
On donnera l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
On montrera que la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$.
12. Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{3-x}}$.
On précisera une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{13}{6}$.

Exercices plus difficiles

- On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$.
 - Étudier l'ensemble de définition D_f de f , ainsi que sa parité.
 - Étudier les limites de f aux bornes de D_f .
 - Donner une expression de sa dérivée f' .
 - On pose $u(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)$ pour tout x réel.
Montrer que la fonction u s'annule exactement une fois sur \mathbf{R}_+^* , en un réel qu'on notera α .
En déduire les variations de la fonction f .
On donne : $\alpha \approx 1.98$
 - Montrer que f admet un maximum égal à $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$.
 - Donner l'allure précise de la courbe représentative de f sur son ensemble de définition.
- Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.
- Soient p et q deux réels strictement positifs tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Soit v un réel strictement positif, on pose $f_v(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{v^q}{q} - vx$.
Étudier la fonction f_v .
En déduire que, pour tous réels u, v strictement positifs, on a : $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.
- Soit $f : x \mapsto 3xe^{-x^2}$.
Faire l'étude complète de f .
On expliquera pourquoi on peut se contenter d'étudier f sur \mathbf{R}_+ , et on précisera une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0.
- Soit $f : x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{8}}$.
Faire l'étude complète de f .
On expliquera pourquoi on peut se contenter d'étudier f sur \mathbf{R}_+ , et on précisera une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0.
- f est une fonction définie sur \mathbf{R} .
On suppose que la courbe C_f , représentative de f , admet un axe de symétrie vertical et un centre de symétrie.
Montrer que f est une fonction périodique.
- Soit $f : x \mapsto (x + 1)^{\frac{1}{x}}$.
 - Étudier l'ensemble de définition de f .
 - Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Quelle(s) asymptote(s) peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
 - On pose : $u(x) = x - (1 + x) \ln(1 + x)$ pour tout $x > -1$.
Montrer que la fonction u admet un maximum sur $] -1; +\infty[$.
 - En déduire les variations de f puis donner l'allure de sa courbe représentative.
- Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - Étudier la parité de f .
Sur quel intervalle I suffit-il d'étudier f ?
 - Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle I .
 - Dresser le tableau de variations de f , puis donner l'allure de sa courbe représentative.

9. Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - \ln(x + 3)}$.
On précisera une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2 .
10. Soit $f : x \mapsto x^{1 - \frac{1}{x}}$.
- Étudier l'ensemble de définition de f .
 - Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - On pose : $u(x) = x - 1 + \ln(x)$ pour tout $x > 0$.
Étudier le signe de la fonction u .
 - En déduire les variations de f puis donner l'allure de sa courbe représentative.
11. Soit $f : x \mapsto \ln(-2x^2 + 3x - 1)$.
Étudier la fonction f .
On mettra en évidence l'existence d'un maximum M et on montrera que $M = -3 \ln 2$.
12. Soit $f : x \mapsto 3x - \frac{1}{2} - [3x]$.
Étudier la parité et la périodicité de f , puis donner l'allure de son graphe.
13. Faire l'étude détaillée de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{2}$.
14. On pose $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x - 2}}{\sqrt{\ln x - 1}}$.
- Étudier l'ensemble de définition de f .
 - Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Dresser le tableau de variations de f .
 - Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e^4 .
15. Faire l'étude détaillée de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{2}$.
16. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$.
- Faire l'étude complète de la fonction g d'expression : $g(x) = \frac{e^x}{x} - 1$.
 - En déduire l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f .
 - Étudier les limites de f aux bornes de \mathcal{D}_f .
 - Montrer que f est dérivable sur \mathcal{D}_f , puis que :
pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{e^x(x - 1)}{x(e^x - x)}$
 - En déduire les variations de la fonction f .
 - Tracer la courbe représentative de f .
On donne : $\ln(e - 1) \approx 0,54$
17. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1 - x}{x} \times \ln(x)$.
- Donner l'ensemble de définition \mathcal{D} de f .
 - Étudier le sens de variations de la fonction g définie sur \mathbf{R}_+^* par : $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.
 - Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur \mathbf{R}_+^* .
 - Montrer que f est dérivable sur \mathcal{D} , et que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$.
 - En déduire les variations de f .
 - Étudier les limites de f aux bornes de \mathcal{D} , puis dresser le tableau de variations de f .
 - Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
On donne : $\ln(e - 1) \approx 0,54$

18. Faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \ln \left(\frac{x^x - 1}{x^x + 1} \right)$.

19. Faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln(x^2) - \ln^2(x)}}$.