

# DS n°1, mathématique

Durée : 2 heures

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.

L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 page et une feuille annexe à rendre.

Un temps conseillé est donné à titre indicatif.

## Exercice 1 : Étude d'une fraction rationnelle (1 heure 20 minutes)

Soit la fonction  $f$  d'expression :  $f(x) = \frac{x^2 + 9x + 18}{2x + 4}$

On appelle  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

- Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $f$ .
- Résoudre sur  $\mathcal{D}$  l'inéquation :  $f(x) \geq 0$ .
- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}$ , et que :  $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{x(x+4)}{2(x+2)^2}$
- Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathcal{D}$ .
- (a) Étudier les limites de  $f$  aux bornes de  $\mathcal{D}$ .  
(b) En déduire que  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote verticale, dont on précisera une équation.
- Dresser le tableau de variations complet de  $f$ .
- (a) Montrer que :  $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + \frac{2}{x+2}$   
(b) En déduire l'existence d'une asymptote oblique  $\Delta$  à  $\mathcal{C}_f$ , et préciser les positions relatives. 'position relative' signifie préciser qui de  $\Delta$  ou de  $\mathcal{C}_f$  est en-dessous ou au-dessus.
- Sur la feuille annexe, donner l'allure de la courbe  $\mathcal{C}_f$  en tenant compte de tous les résultats trouvés précédemment.  
On pourra calculer les valeurs  $f(-1)$  et  $f(2)$  pour avoir un tracé plus précis.

## Exercice 2 : Une fonction construite avec le logarithme népérien (40 minutes)

On définit la fonction  $f$  par :  $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

- (a) Étudier le signe de  $\frac{1-x}{1+x}$ .  
(b) En déduire l'ensemble de définition de  $f$ .
- (a) Montrer que la fonction  $f$  est impaire.  
(b) Sur quel intervalle est-il suffisant de l'étudier ?  
(c) Quelle particularité présente sa courbe représentative ?
- (a) Déterminer l'expression de la dérivée  $f'(x)$ .  
(b) Préciser le sens de variations de  $f$ .  
(c) Déterminer l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de  $f$ .
- (a) Étudier la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 1 ( $x < 1$ ).  
(b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
- Résoudre l'inéquation :  $f(x) \geq \ln(2x+4)$ .

FIN DU SUJET

**Annexe de l'exercice 1**  
*À rendre avec votre copie.*

NOM : .....

CLASSE : BCPST 1B

Titre : .....

