Corrigé du DS n°1

Exercice 1 : Fraction rationnelle

1. $2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$ donc $\boxed{\mathcal{D}=\mathbf{R}\setminus\{-2\}=\,]-\infty,-2\,[\,\cup\,]-2,+\infty[.}$

2. **Signe de $f(x)$** : le discriminant du trinôme $x^2+9x+18$ vaut $\Delta=9^2-4\times1\times18=81-72=9>0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles : $x_1=\dfrac{-9-\sqrt{9}}{2}=-6$ et $x_2=\dfrac{-9+\sqrt{9}}{2}=-3$.
Son coefficient dominant est positif, donc il est positif à l'extérieur des racines. On a donc le tableau de signes :

x	$-\infty$		-6		-3		-2		$+\infty$
$x^2+9x+18$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$2x+4$		$-$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

En conclusion : $\boxed{f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in[-6,-3]\cup\,]-2,+\infty[.}$

3. f est dérivable sur $\mathcal{D}$ par opérations et on a :

$$\forall x\in\mathcal{D},\ f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(2x+9)(2x+4)-2(x^2+9x+18)}{(2x+4)^2}=\frac{2x^2+8x}{4(x+2)^2}=\frac{2x(x+4)}{4(x+2)^2}$$

donc $\boxed{\forall x\in\mathcal{D},\ f'(x)=\dfrac{x(x+4)}{2(x+2)^2}}$

4. **Tableau de signes de $f'(x)$** :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
x		$-$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	$\mid$	$+$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

5. (a) $\ast$ Par règle sur les fractions rationnelles : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2}x$
donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$
$\ast$ Par opérations, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty.}$

   (b) Puisque f admet une limite infinie en -2, $\boxed{\text{la droite d'équation } x=-2 \text{ est asymptote verticale à } \mathcal{C}_f.}$

6. D'après l'étude du signe de $f'(x)$, on peut conclure :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

7. (a) Soit $x \neq -2$. On a : $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2} + \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{x(x+2)+7(x+2)+2\times 2}{2(x+2)} = \dfrac{x^2+9x+18}{2x+4} = f(x)$.

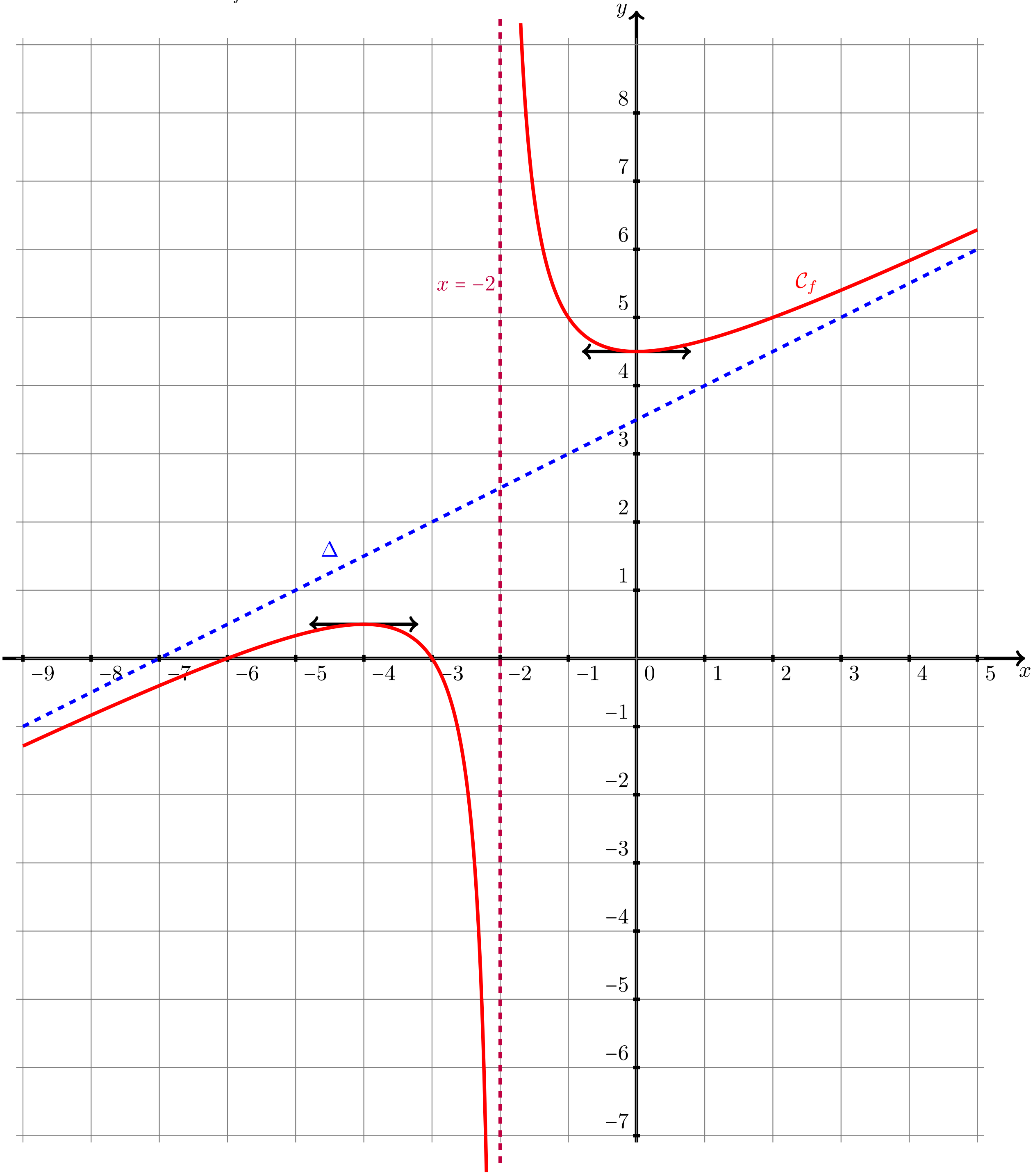
(b) D'après la question précédente, $f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{2}{x+2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \text{ est asymptote oblique à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty.}$

De plus, $\dfrac{2}{x+2} > 0$ si et seulement si $x > -2$ donc

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \Delta \text{ sur }]-\infty, -2[\text{ et au-dessus de } \Delta \text{ sur }]-2, +\infty[.}$

8. **Allure de la courbe $\mathcal{C}_f$**



Exercice 2 : Fonction construite à partir de ln

1. (a) **Tableau de signe de** $\dfrac{1-x}{1+x}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{1-x}{1+x}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

   (b) On en déduit que $\boxed{\mathcal{D}_f =]-1,1[}$.

2. (a) Soit $x \in \mathcal{D}_f$. Alors $-x \in \mathcal{D}_f$ et : $f(-x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$

   donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

   (b) Il suffit donc d'étudier f sur l'intervalle $[0,1[$.

   (c) La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. (a) f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ par opérations, et : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$

   donc $f'(x) = \dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1+x)}$ $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = -\dfrac{2}{1-x^2}.}$

   (b) Sur $\mathcal{D}_f$, $1-x^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathcal{D}_f.}$

   (c) L'équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

   On remplace : $f'(0) = -2$ et $f(0) = \ln(1) = 0$ et on trouve $\boxed{T_0 : y = -2x.}$

4. (a) Par opérations, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty}$

   (b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

   Par symétrie (f impaire), elle admet également une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

5. $f(x) \geqslant \ln(2x+4) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \geqslant \ln(2x+4)$. On résout cette inéquation sur $]-1,1[$.

   En appliquant la fonction exponentielle (strictement croissante) :

$$f(x) \geqslant \ln(2x+4) \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} \geqslant 2x+4 \Leftrightarrow \frac{1-x-(1+x)(2x+4)}{1+x} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2-7x-3}{1+x} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2-7x-3 \geqslant 0 \quad \text{car } 1+x>0 \text{ sur }]-1,1[$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+7x+3 \leqslant 0 \quad \text{en multipliant par } -1$$

   Le discrimant de ce trinôme est : $\Delta = 7^2 - 4\times 2\times 3 = 49 - 24 = 25 = 5^2$

   donc on a deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-7-5}{2\times 2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-7+5}{2\times 2} = -\dfrac{1}{2}$

   Le trinôme est négatif à l'intérieur des racines, donc $\boxed{f(x) \geqslant \ln(2x+4) \Leftrightarrow x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right].}$