# I Notation des sommes

1. Le symbole $\Sigma$
2. Indices de sommation
3. Changements d'indices

# II Sommes usuelles

1. Sommes de constantes ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Sommes arithmétiques ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Sommes de carrés ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Sommes géométriques ($\rightarrow$ *Annexe*)

# III Propriétés des sommes

1. Linéarité
2. Associativité
3. Sommes télescopiques
4. Somme et ordre

# IV Produits

1. Notation
2. Produits usuels ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. La fonction factorielle
4. Propriétés des produits
5. Produits télescopiques
6. Produit et ordre

# V Coefficients binomiaux

1. Définition ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Valeurs à retenir ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Symétrie des coefficients binomiaux ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Lemme du pion ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Formule de Pascal ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Triangle de Pascal ($\rightarrow$ *Annexe*)
7. Binôme de Newton ($\rightarrow$ *Annexe*)

# VI Sommes multiples

1. Sommes doubles rectangulaires
2. Sommes doubles triangulaires
3. Exemples d'autres sommes multiples

# Annexes

2.1 Sommes de constantes : $\forall (p,n) \in \mathbf{N}^2$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \lambda = (n-p+1)\lambda$

2.2 Sommes arithmétiques : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2.3 Sommes de carrés : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.4 Sommes géométriques : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall q \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

4.2 Produits usuels :

- de constantes : $\forall (p,n) \in \mathbf{N}^2$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \lambda = \lambda^{n-p+1}$

- d'entiers consécutifs : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times ... \times n = n!$

$\forall (p,n) \in \mathbf{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$, $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} k = p \times (p+1) \times ... \times n = \frac{n!}{(p-1)!}$

5.1 Définition des coefficients binomiaux :

Soient $k$ et $n$ deux entiers. On pose : $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5.2 Valeurs à retenir : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\binom{n}{0} = 1$, $\displaystyle\binom{n}{1} = n$, $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\displaystyle\binom{n}{n} = 1$.

5.3 Symétrie des coefficients binomiaux : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5.4 Lemme du pion : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

5.5 Formule de Pascal : Si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors : $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

5.6 Triangle de Pascal : On lit $\displaystyle\binom{n}{k}$ à l'intersection de la colonne $k$ et de la ligne $n$.

| $k =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 0$ | 1 | | | | | | | | |
| $n = 1$ | 1 | 1 | | | | | | | |
| $n = 2$ | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| $n = 3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| $n = 4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| $n = 5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| $n = 6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| $n = 7$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

5.7 Binôme de Newton : $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$