

**Identités trigonométriques :**

1. Montrer que, pour tout  $\theta \in \mathcal{D}_{\tan}$ , on a :  $\frac{1}{\cos(\theta)} - \tan(\theta) \times \sin(\theta) = \cos(\theta)$ .
2. Montrer que pour tous réels  $a, b$ , on a :  $\cos(a+b)\cos(b) + \sin(a+b)\sin(b) = \cos(a)$ .
3. Montrer que pour tout réel  $t$ , on a :  $\sin^4(t) - \cos^4(t) = -\cos(2t)$ .
4. Montrer que pour tous  $a, b \in \mathcal{D}_{\tan}$  tels que  $a - b$  n'est pas un multiple de  $\pi$ , on a : 
$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{\tan(a) - \tan(b)}$$
.
5. Montrer que pour tout  $t \in \mathcal{D}_{\tan}$ , on a :  $\frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)} = \cos(2t)$ .
6. Montrer que pour tout  $t \in \mathcal{D}_{\tan}$ , on a :  $\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \sin(2t)$ .

**Équations, inéquations trigonométriques :**

1. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation :  $\sin(3t - 1) = \frac{1}{2}$ .
2. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation :  $\cos(2 - 5t) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ .
3. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation :  $4 \sin^2(2t) - 3 = 0$ .
4. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation :  $2 \sin^4(t) = \sin^2(t)$ .
5. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation :  $2 \sin^2(t) + 5 \sin(t) + 2 = 0$ .
6. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation :  $2 \sin^2 t = \sqrt{3} \sin(2t)$ .
7. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation :  $\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ .
8. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation :  $\sqrt{3} \tan(2t) + 1 = 0$ .
9. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation :  $2 \sin^2(t) - \cos(t) = 1$ .
10. (a) Soit  $X \in \mathbf{R}$ . Développer :  $A(X) = 4 \left(X - \frac{1}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .  
(b) Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'inéquation :  $4 \sin^2 t + 2(\sqrt{3} - 1) \sin t - \sqrt{3} \geq 0$ .
11. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'inéquation :  $4 \cos^2(3t) - 1 \leq 0$ .
12. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'inéquation :  $(2 \sin t - 1)(2 \cos t - 1) \geq 0$ .
13. Résoudre l'inéquation d'inconnue  $x \in \mathbf{R}$  :  $\sin^2 t > \frac{1}{2} \sin t$ .

**Études de fonctions :**

1. Soit la fonction  $f : t \mapsto \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ .  
(a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .  
(b) Montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur l'intervalle  $]0, \pi]$ .  
(c) Déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ .  
*Indication : On rappelle que :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$  et que :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t - 1}{t} = 0^-$ .*  
(d) Étudier les variations de  $f$  sur  $]0, \pi]$ .  
(e) Montrer que la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $\pi$  a pour équation :  $y = \frac{\pi - t}{2}$ .  
(f) Donner l'allure de la courbe  $C_f$  sur son ensemble de définition.

2. On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - \sin(x)$ .
- Déterminer un intervalle réel  $I$  sur lequel il est suffisant d'étudier  $f$ .
  - Montrer que  $f$  est dérivable sur  $I$ , et que :  $\forall x \in I, f'(x) = 2(\cos(x) - 1)(\cos(x) + \frac{1}{2})$ .
  - En déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $I$ .  
Préciser les éventuelles tangentes horizontales, et les extrema.
  - Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .
3. On pose :  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$ .
- Préciser l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
  - Sur quel intervalle  $I$  suffit-il d'étudier  $f$  ?
  - Montrer que  $f$  est dérivable sur  $I$ , et que :  $\forall x \in I, f'(x) = \frac{-\sin x - \cos x - 1}{(1 + \sin x)^2}$ .
  - Montrer que :  $\forall a \in \mathbf{R}, \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a$ .
  - En déduire le tableau de variations complet de  $f$  sur  $I$ .
  - Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .  
*On précisera les éventuelles asymptotes, tangentes remarquables, ainsi que la valeur en  $x = 0$ .*
4. Soit  $f : x \mapsto \frac{\cos(8x) + 1}{\sin(6x)}$ .
- Étudier l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
  - Étudier la parité de  $f$ .
  - Montrer que  $f$  est périodique, de période  $\pi$ .
  - Montrer que, pour tout  $x \in D_f, \frac{\pi}{2} - x \in D_f$  et  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$ .
  - En déduire qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $]0, \frac{\pi}{4}]$ .
5. On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \sin x}$ .
- Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $f$ .
  - Montrer que  $f$  est  $2\pi$ -périodique.
  - Montrer que :  $\forall x \in \mathcal{D}, f(\pi - x) = -f(x)$ .
  - Déduire des questions précédentes un intervalle  $I$  sur lequel il est suffisant d'étudier  $f$ .
  - Montrer que  $f$  est dérivable sur  $I$ , et que :  $\forall x \in I, f'(x) = \frac{-2(\sin^2 x + \sin x - 1)}{1 + \sin x}$ .  
*On remarquera que :  $X^3 + 2X^2 - 1 = (X + 1)(X^2 + X - 1)$ .*
  - En déduire le tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .  
*On mettra en évidence l'existence d'un maximum égal à :  $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)^{\frac{5}{2}}}{4}$ .*
  - Étudier la limite de  $f$  en  $-\frac{\pi}{2}^+$ , puis tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .
6. Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(x)}$ .
- Étudier l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
  - Étudier la périodicité de  $f$ .
  - Étudier la parité de  $f$ .

- (d) Montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur l'intervalle  $]0, \pi[$ .  
Préciser comment obtenir la courbe représentative de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ , à partir de celle sur  $]0, \pi[$ .
- (e) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $]0, \pi[$ , en précisant les limites.
- (f) Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$  sur  $] - 2\pi, 2\pi[$ .
7. Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$ .
- (a) Déterminer un réel  $\varphi$  tel que pour tout réel  $x$ , on a :  $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \sin(x + \varphi)$ .
- (b) Étudier l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
- (c) Montrer que  $f$  est périodique, de période  $\pi$ .
- (d) Étudier la parité de  $f$ .
- (e) Montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur l'intervalle  $I = \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$ .
- (f) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $I$ .
- (g) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $I$ .
- (h) Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$  sur  $[-\pi, \pi]$ .
8. Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \tan(x) + \sin(x)$ .
- (a) Étudier l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
- (b) Étudier la périodicité de  $f$ .
- (c) Étudier la parité de  $f$ .
- (d) Dédire des questions précédentes qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $A = \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$ .  
Expliquer comment on pourra alors construire la courbe représentative de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ .
- (e) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}$ , et donner l'expression de sa dérivée.
- (f) Étudier le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in A$ .
- (g) Préciser les valeurs de  $f$  en 0 et en  $\pi$ .  
Déterminer ses limites en  $\frac{\pi}{2}$ .
- (h) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $A$ .
- (i) Donner l'allure de la représentation graphique de  $f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .