# Corrigé du DM n°2

## Exercice 1 : Inéquation trigonométrique

On considère l'inéquation $(E)$ : $\sin(2x) \geqslant \sin(x)$

1. Formule de duplication du sinus : $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).}$
2. 

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \sin(2x) - \sin(x) \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \sin(x)\big(2\cos(x) - 1\big) \geqslant 0\end{aligned}$$

3. Sur $[0, 2\pi]$, $\sin(x) > 0$ ssi $x \in ]0, \pi[$ et $\sin(x) = 0$ ssi $x = 0, \pi$ ou $2\pi$.
   $2\cos(x) - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc sur $[0, 2\pi]$, $2\cos(x) - 1 > 0$ ssi $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$ ou $x \in \left]\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$
   et $2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$. On obtient le tableau de signes suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ | | $\frac{5\pi}{3}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ |
| $2\cos(x) - 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\sin(x)\big(2\cos(x) - 1\big)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |

4. On déduit l'ensemble-solution de $(E)$ : $\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[2k\pi, \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\pi + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]}$

## Exercice 2 : fonction trigonométrique $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}$

1. $f(t)$ existe ssi $1 - \cos(t) \neq 0$ donc ssi $\cos(t) \neq 1$. $\boxed{\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.}$
2. **Périodicité** : Soit $t \in \mathcal{D}$, alors $t + 2\pi \in \mathcal{D}$ et :
$$f(t + 2\pi) = \frac{\sin(t + 2\pi)}{1 - \cos(t + 2\pi)} = \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)} = f(t)$$
   car sin et cos sont $2\pi$-périodiques. Ainsi, $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$
   **imparité** : $\mathcal{D}$ est centré et :
$$\forall t \in \mathcal{D},\ f(-t) = \frac{\sin(-t)}{1 - \cos(-t)} = \frac{-\sin(t)}{1 - \cos(t)} = -f(t)$$
   car sin est impaire et cos est paire. Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire.}}$
   En conclusion, on peut se contenter d'étudier $f$ sur $I = ]0, \pi]$. On effectue ensuite une symétrie centrale de centre $O$ (fonction impaire) puis des translations de vecteurs $2k\pi\overrightarrow{i}$ (périodicité).
3. a&b) $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ par opérations, et :
$$\begin{aligned}\forall t \in \mathcal{D},\ f'(t) &= \frac{\cos(t)\big(1 - \cos(t)\big) - \sin(t)\big(\sin(t)\big)}{(1 - \cos(t))^2}\\ &= \frac{\cos(t) - \cos^2(t) - \sin^2(t)}{(1 - \cos(t))^2}\\ &= \frac{\cos(t) - 1}{(1 - \cos(t))^2}\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall t \in \mathcal{D},\ f'(t) = -\frac{1}{1 - \cos(t)}}$$
   c) Sur $I$, $\cos(t) < 1$ donc $1 - \cos(t) > 0$ et $f'(t) < 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } I.}$

4. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \pm\infty$.

$\lim\limits_{t\to 0}\sin(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}(1-\cos t) = 0$ donc on a une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

On sait que $\sin' = \cos$ donc $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ et par définition :

$\sin'(0) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{\sin(0+t)-\sin(0)}{t} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{\sin(t)}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t)}{t} = 1$.

De même, $\cos' = -\sin$ donc $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$ et par définition :

$\cos'(0) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{\cos(0+t)-\cos(0)}{t} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{\cos(t)-1}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos(t)-1}{t} = 0^-$.

Par opérations, on a donc : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{1-\cos(t)} = +\infty$.

On peut donc écrire : $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{1-\cos(t)} = \dfrac{\sin(t)}{t} \times \dfrac{t}{1-\cos(t)} \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\longrightarrow} +\infty$

En conclusion : $\boxed{\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t) = +\infty \quad \text{donc } \mathcal{C}_f \text{ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.}}$

5. L'équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}_f$ en $\pi$ est : $y = f'(\pi)(t-\pi) + f(\pi)$.

On calcule : $f(\pi) = \dfrac{\sin(\pi)}{1-\cos(\pi)} = 0$ et $f'(\pi) = -\dfrac{1}{1-\cos(\pi)} = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\text{la tangente } T \text{ en } \pi \text{ à } \mathcal{C}_f \text{ a pour équation : } y = \dfrac{\pi - t}{2}.}$

6. <u>Allure de $\mathcal{C}_f$ sur $[-2\pi, 2\pi]$</u> :