DS n°2, mathématique

Durée : 3 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 page recto/verso.
Un temps conseillé est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Résolution d'une inéquation *(45 minutes)*

On considère l'inéquation $(E) : \dfrac{\cos^2(x)}{\sin(x)} \geqslant \dfrac{3}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de l'inéquation (E).
2. Montrer que : $(E) \Leftrightarrow \dfrac{-2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2}{\sin(x)} \geqslant 0$.
3. Soit t un réel. Factoriser l'expression : $P(t) = -2t^2 - 3t + 2$.
4. Résoudre l'inéquation (E) sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2 : Une loi des tangentes *(45 minutes)*

On considère un triangle plan, non rectangle, dont les trois angles sont nommés a, b, c.
Les nombres a, b, c appartiennent donc à l'ensemble $]0, \pi[\smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, et on rappelle que la somme des angles d'un triangle plan vaut π :

$$a + b + c = \pi$$

Le but de cet exercice est de démontrer la relation :

$$\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) = \tan(a).\tan(b).\tan(c)$$

1. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, exprimer $\sin(\pi - t)$ puis $\cos(\pi - t)$ en fonction de $\sin(t)$ ou $\cos(t)$.
   En déduire une expression de $\tan(\pi - t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$, valable pour tout $t \in \mathcal{D}_{\tan}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose : $T = \tan(a) + \tan(b) + \tan(c)$.

2. Rappeler les formules d'addition du sinus et du cosinus.
3. Montrer que : $\tan(a) + \tan(b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$
4. Déduire des questions précédentes que : $T = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)} - \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$
5. Montrer que : $\dfrac{1}{\cos(a)\cos(b)} - \dfrac{1}{\cos(a+b)} = -\dfrac{\tan(a)\tan(b)}{\cos(a+b)}$
6. En déduire que : $T = \tan(a).\tan(b).\tan(c)$

Problème : Étude d'une fonction *(1 heure 30 minutes)*

On définit la fonction f par son expression : $f(x) = \cos(x) - \sin^2(x)$.
On note Γ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. **Propriétés générales**
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Calculer les images par f des réels : 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π.
   (c) Montrer que la fonction f est 2π-périodique.
   (d) Étudier la parité de f.
   (e) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = [0, \pi]$.
   Préciser quelles transformations géométriques permettent ensuite d'obtenir la courbe Γ.

2. **Variations**
   (a) Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ?
   Déterminer une expression de la dérivée f' de la fonction f.
   (b) Résoudre sur $I = [0, \pi]$ l'inéquation : $1 + 2\cos(x) \geqslant 0$.
   (c) En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in I$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I, en précisant tous les points où sa dérivée s'annule.

3. **Racine de f**
   Le tableau de variations de f montre que f s'annule une unique fois sur l'intervalle I.
   On se propose de déterminer l'unique solution sur I de l'équation : $f(x) = 0$.
   On pose, pour $x \in [0, \pi[$, $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
   (a) Rappeler les trois formules de duplication du cosinus.
   (b) Montrer que : $\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} = \cos(x)$.
   (c) On peut démontrer de même que : $\dfrac{2t}{1 + t^2} = \sin(x)$.
   Montrer que : $\forall x \in [0, \pi[,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow t^4 + 4t^2 - 1 = 0$.
   (d) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $X^4 + 4X^2 - 1 = 0$.
   On donne : $\sqrt{5} \approx 2,23$ *et on rappelle que* $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
   (e) Pour $x \in [0, \pi[$, préciser le signe de t et en déduire que $t = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$.
   (f) On note α l'unique réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan(\alpha) = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$.
   Exprimer en fonction de α l'unique solution $x_0 \in I$ de l'équation $f(x) = 0$.

4. **Représentation graphique**
   On se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, d'unités graphiques :
   - 6 cm (ou 6 grands carreaux) pour π unités horizontalement ;
   - 4 cm (ou 4 grands carreaux) pour 1 unité verticalement.

   On se propose de tracer l'allure de la courbe Γ sur une feuille au format 'paysage'.
   (a) Sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, tracer toutes les tangentes horizontales à la courbe Γ.
   (b) En déduire l'allure précise de Γ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
   On donne $x_0 \approx 0,9$ *soit* $1,7$ *cm (ou grands carreaux) horizontalement.*

FIN DU SUJET