I L'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes

1. Définition. Somme et produit de nombres complexes.
2. Plongement de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Forme algébrique d'un nombre complexe. Le nombre i.
3. Module d'un nombre complexe. Inverse et division dans $\mathbf{C}$. ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Propriétés des opérations.
5. Propriétés du module. ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Nombres complexes et relation d'ordre.

II Conjugaison dans $\mathbf{C}$

1. Définition du conjugué $\overline{z}$ d'un complexe $z \in \mathbf{C}$.
2. Propriétés du conjugué. ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Expression de z à l'aide de $\overline{z}$. ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Expression de $|z|$ à l'aide de z et $\overline{z}$. ($\rightarrow$ *Annexe*)

III L'aspect géométrique des nombres complexes

1. Le plan complexe, l'ensemble $\mathbb{U}$.
2. Arguments d'un complexe non nul, forme trigonométrique.
3. Notation d'Euler, forme exponentielle. ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Formules d'Euler et de Moivre. ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Calculs sous forme exponentielle. ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Interprétations géométriques.
7. Liens entre forme algébrique et forme exponentielle. ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Équations dans $\mathbf{C}$

1. Égalités dans $\mathbf{C}$.
2. Équations du second degré dans $\mathbf{C}$.
3. Systèmes somme-produit.
4. Racines n-èmes dans $\mathbf{C}$.

V Applications à la trigonométrie

1. Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.
2. Linéarisation.
3. Formule de Fresnel. ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Technique de l'angle médian
5. Sommes trigonométriques.

Annexes

1.3 Module, inverse, division :

• Soit $z \in \mathbf{C}$, de forme algébrique $z = x + iy\,(x, y \in \mathbf{R})$. Alors : $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

• Si de plus $z \neq 0$, alors : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x-iy}{|z|^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

• Identité remarquable : $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy)$

1.5 Propriétés du module : z, z_1, z_2, z_k désignent des nombres complexes, éventuellement non nuls.

- $|z| \in \mathbf{R}^+$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
- $\begin{cases} |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \\ |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \end{cases}$
- $|\overline{z}| = |-z| = |z|$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
- $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

2.2 Propriétés du conjugué : z, z_1, z_2, z_k désignent des nombres complexes, éventuellement non nuls.

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$
- $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0$

2.3 Expression de z à l'aide de $\overline{z}$: $\forall z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

2.4 Expression du module : $\forall z \in \mathbf{C},\ |z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ou encore $|z|^2 = z\,\overline{z}$ ou encore $(z \neq 0)$ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

3.3 Forme exponentielle : Soit $z \in \mathbf{C}$ de module $|z| = r \in \mathbf{R}_+$ et admettant un argument $\theta \in \mathbf{R}$.
Alors : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

3.4-a Formules d'Euler : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

3.4-b Formules de Moivre : $\forall \theta, \theta' \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N},\ e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

3.5 Calculs sous forme exponentielle : Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'} \in \mathbf{C}^\star$ sous forme exponentielle.

- $\overline{z} = re^{-i\theta}$
- $z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$

3.7 Liens entre forme algébrique et forme trigonométrique : Soit $z = x + iy = re^{i\theta} \in \mathbf{C}^\star$.

Alors : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ et $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos(\theta) = x/r \\ \sin(\theta) = y/r \end{cases}$

5.3 Formule de Fresnel :
Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$. Alors : $\exists r, \varphi \in \mathbf{R},\ \forall \theta \in \mathbf{R},\ a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta - \varphi)$.