Devoir Maison n°3

Exercice 1 : Dérivées de sommes du binôme

1. (a) Soient k, n des entiers tels que : $1 \leqslant k \leqslant n$.
   Démontrer le **lemme du pion** : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

   (b) **Généralisation** : soient p, k, n des entiers tels que $p \leqslant k \leqslant n$.
   Montrer que : $\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

   (c) **Application** : utiliser le lemme du pion pour montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère la fonction $f : x \longmapsto (x+1)^n$.

   (a) Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, et donner l'expression de sa dérivée f'.

   (b) Justifier que, pour tout réel x, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

   (c) En utilisant cette relation, déterminer une autre expression de f', sous forme de somme.

   (d) En considérant le réel $x = 1$, retrouver le résultat de la question **1c)**.

   (e) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

   (f) En déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$.

   On pensera à exprimer k^2 en fonction de $k(k-1)$ et de k.

Exercice 2 : Nombres complexes

Soient ω, A, B les nombres complexes définis par :

$$\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right), \quad A = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6, \quad B = \omega + \omega^2 + \omega^4$$

1. Calculer la somme : $S = \sum_{k=0}^{6} \omega^k$.
2. Soit k un entier quelconque. Simplifier ω^{7+k}.
3. En déduire une expression simple des nombres : $A + B$ et AB.
4. Donner alors les valeurs possibles du couple (A, B).
5. Montrer que : $\mathrm{Im}(\omega^4) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$.
6. Comparer $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, puis en déduire que : $\mathrm{Im}(B) > 0$.
7. Donner enfin les valeurs exactes des nombres A et B.

* * *