

**Logique**

1.  $f$  désigne une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .

Traduire avec des quantificateurs, puis écrire la négation des assertions suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| (a) $f$ est constante.                    | (f) $f$ est une fonction paire.                   |
| (b) $f$ ne s'annule pas.                  | (g) $f$ ne prend jamais deux fois la même valeur. |
| (c) $f$ est croissante sur $\mathbf{R}$ . | (h) $f$ est majorée par 1.                        |
| (d) $f$ présente un maximum.              | (i) $f$ est positive.                             |
| (e) $f$ ne peut s'annuler qu'une fois.    | (j) $f$ atteint toutes les valeurs réelles.       |

2. Vrai ou faux ? Justifier.

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$ . | (e) $\forall x \in \mathbf{R}, (x + 1 \neq 0) \vee (x + 2 \neq 0)$ .                                   |
| (b) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$ . | (f) $\forall a \in \mathbf{R}^*, \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \varepsilon <  a $ .          |
| (c) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, y^2 > x$ .   | (g) $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \forall z \in \mathbf{R}, y - zx = 0$ .       |
| (d) $\exists x \in \mathbf{R}, (x + 1 = 0) \vee (x + 2 = 0)$ .        | (h) $\forall y \in \mathbf{R}^*, \forall z \in \mathbf{R}^*, \exists x \in \mathbf{R}^*, y - zx = 0$ . |

**Récurrence :**

1. Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3$ .

Montrer que :  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = -2^{n+1} + 3$ .

2. Montrer par récurrence que :  $\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n k2^k = 2^{n+1}(n-1)$ .

3. Montrer que :  $\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}$ .

4. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $\mathcal{P}_n : \ll 2^n > n^2 \gg$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{P}_n$  est héréditaire à partir du rang  $n = 3$ .

(b) Déterminer toutes les valeurs de  $n$  pour lesquels  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

5. Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

6. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ . Montrer par récurrence que :  $\forall n \geq 1, u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ .

7. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ . Montrer par récurrence que :  $\forall n \geq 1, S_n \leq 2\sqrt{n}$ .

8. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . On considère  $n$  droites du plan telles que :

\* aucune n'est parallèle à une autre,

\* aucun point du plan n'appartient à 3 (ou plus) de ces droites.

On note  $R_n$  le nombre de régions du plan délimitées par ces droites.

(a) À l'aide d'un schéma, déterminer  $R_0, R_1, R_2$  et  $R_3$ .

(b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbf{N}, R_{n+1} = n + 1 + R_n$ .

(c) En déduire que :  $\forall n \in \mathbf{N}, R_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ .

9. On définit la suite  $(u)$  par  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{6u_n - 5} \end{cases}$ . Montrer que,  $\forall n \in \mathbf{N}, 1 \leq u_n \leq 5$ .

10. Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}$ . Montrer que :  $\forall n \geq 0, u_n = \frac{2}{2n+1}$ .

11. Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ . Montrer que  $(u_n)$  est croissante.
12. Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \end{cases}$ . Montrer que  $\forall n \geq 0, u_n = n^2 + 4n + 2$ .
13. On pose pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ . Montrer que :  $\forall n \geq 1, S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ .
14. Montrer que :  $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2}$ .
15. Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ , infiniment dérivable sur  $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ .  
Montrer que la  $n^{\text{ème}}$  dérivée de  $f$  a pour expression :  $\forall x \neq 1, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ .
16. On définit la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 0}$  par :  $\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$
- (a) Calculer les termes de la suite  $(F_n)_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 7 \rrbracket$ ,  
puis les quantités  $F_n^2$  et  $F_{n-1} \times F_{n+1}$  pour  $n \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ .
- (b) Quelle relation peut-on deviner ? Démontrer ce résultat.
17. On définit la suite  $(u)$  par  $u_1 = 3$  et  $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ .  
Donner une expression explicite de  $u_n$ .

### Analyse-synthèse

1. On cherche toutes les fonctions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telles que  $(E) : \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ .
- (a) Montrer que si  $f$  vérifie  $(E)$ , alors  $f(0) \neq 0$  et  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{x + f(0)}{f(0)}$ .
- (b) Montrer que si  $f$  vérifie  $(E)$ , alors  $f(0) = 1$ .
- (c) En déduire toutes les fonctions  $f$  vérifiant  $(E)$ .

### Sommes :

1. Calculer la somme :  $S = 27 + 31 + 35 + 39 + 43 + \dots + 107$ .
2. Calculer la somme :  $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 2025^2$ .
3. Calculer la somme :  $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{20}}$ .
4. Calculer la somme :  $S = 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 + \dots + 50^2$ .
5. Calculer la somme :  $S = 100 + 111 + 122 + 133 + \dots + 1200$ .
6. Exprimer en fonction de  $n \in \mathbf{N}$  la somme :  $S_n = \sum_{p=n}^{2n} (p^2 + 2n + 4)$ .
7. Exprimer en fonction de  $n \geq 3$  la somme :  $S_n = \sum_{k=5}^{2n} (k+2)(2k-1)$ .
8. Exprimer en fonction de  $n \in \mathbf{N}$  la somme :  $S_n = \sum_{i=n}^{n^2} (2i + 2^i)$ .
9. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on pose :  $S_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n+1)^2$ .
- (a) Écrire en langage *Python* une fonction permettant de calculer  $S_n$ .
- (b) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

10. On pose, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^{2n} (k+1)(k+3)$ .
- (a) Écrire en langage *Python* une fonction `somme` d'argument  $n$  renvoyant la valeur de  $S_n$ .
- (b) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
11. Exprimer en fonction des entiers  $p, n (p \leq n)$  la somme :  $\sum_{k=p}^n (2k^2 - 3k + 1)$ .
12. Soit  $n \geq 3$ . Calculer  $\sum_{k=3}^n \ln \left( \frac{k^2}{(k+1)(k+2)} \right)$ .
13. Soit  $n \geq 2$  un entier. On pose :  $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3 - k}$ .
- (a) Déterminer des réels  $a, b, c$  tels que, pour tout réel  $x \notin \{-1, 0, 1\}$ , on a :  

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$
- (b) En déduire une expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .
14. Soit  $n \geq 1$  un entier. On pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$ .
- (a) Déterminer des réels  $a, b, c$  tels que, pour tout réel  $x \notin \{-3, -1, 0\}$ , on a :  

$$\frac{x-1}{x(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+3}.$$
- (b) En déduire une expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .
15. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . On pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ .
- (a) Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , réduire au même dénominateur :  $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ .
- (b) En déduire une expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .
16. Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ .
- (a) Pour  $k \geq 1$ , réduire au même dénominateur :  $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ .
- (b) En déduire une expression simple de  $S_n$  en fonction de  $n$ .
17. Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose :  $C_n = \sum_{k=0}^n \cos^2 \left( \frac{k\pi}{2n} \right)$ .
- (a) Pour  $x \in \mathbf{R}$ , rappeler une relation simple entre  $\cos x$  et  $\sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ .
- (b) En déduire une expression simple de  $C_n$  en fonction de  $n$ .

### Binôme de Newton :

1. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$ .
2. Exprimer en fonction de  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , la somme :  $S_n = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 2^{3k+1}$ .
3. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Exprimer en fonction de  $n$  la somme :  $S_n = \sum_{p=1}^n \binom{n+1}{p} \frac{3^{p+2}}{2^p}$ .
4. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Exprimer en fonction de  $n$  la somme :  $\sum_{k=1}^n \frac{2^{n-1-k}}{k!(n-k)!}$ .

5. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Calculer :  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ .

6. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ .

(a) Développer  $k(k+1)(k+2)$  et utiliser le résultat de l'exercice **Récurrence 5.**, pour calculer  $S_n$ .

(b) Montrer que  $\forall k \geq 1, k(k+1)(k+2) = 3! \times \binom{k+2}{3}$ .

(c) En déduire que :  $\forall n \geq 1, S_n = 3! \times \binom{n+3}{4}$ .

7. Montrer que :  $\forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \times \binom{n-1}{p}$ .

*Indication : on pourra écrire  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  puis effectuer un glissement d'indices.*

### Produits :

1. Soit  $n \geq 2$  un entier. On pose :  $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$ .

(a) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$ , on :  $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \times \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$ .

(b) En déduire une expression simple de  $P_n$  en fonction de  $n$ .

2. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Calculer  $P_n = \prod_{k=0}^{2n} e^{2k(2n-k)}$ .

3. Soit  $n$  un entier naturel. On pose :  $P_n = \prod_{i=n}^{n^2} (2i)$ .

(a) Écrire en langage *Python* une fonction permettant de calculer  $P_n$ .

(b) Exprimer  $P_n$  en fonction de  $n$ .

### Sommes multiples :

1. Pour  $n \geq 3$ , calculer :  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$ .

2. Calculer pour  $n \geq 1$  :  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2$ .

3. Calculer pour  $n \geq 1$  :  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{j+2}{i}$ .

4. Calculer pour  $n \geq 1$  :  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i2^j$ .

5. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Exprimer  $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j}$  en fonction de  $n$ .

6. Calculer pour  $n \geq 1$  :  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^i 3^{j-i}$ .

7. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Exprimer  $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|$  en fonction de  $n$ .

8. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Exprimer  $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$  en fonction de  $n$ .

9. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Exprimer en fonction de  $n$  la somme  $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{j-i}{j}$ .

10. Calculer pour  $n \geq 1$  :  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j - i$ .

11. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Calculer :  $S_n = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j^2}{2i+1}$ .

12. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . On pose :  $S_n = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j^3}{i+1}$ .

(a) En langage *Python*, écrire une fonction permettant de calculer  $S_n$ .

(b) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

13. Soit  $N \geq 1$ . Montrer que :  $\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$ .

14. Montrer que :  $\forall n \geq 1, \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k = \sum_{k=1}^n k 2^k$ , puis calculer cette somme.

Voir **Réurrence 2**.

**Autres :**

1. Soient  $p, q$  deux entiers naturels.

Montrer que :  $\sum_{k=0}^p \binom{p+q}{k} \binom{p+q-k}{p-k} = 2^p \binom{p}{p+q}$ .

2. (a) Pour  $x \in \mathbf{R}$  et  $m, n \in \mathbf{N}$ , donner les formes développées de :

$$(1+x)^p, (1+x)^q \text{ puis de } (1+x)^{p+q}.$$

(b) En déduire l'*identité de Vandermonde* :

$$\forall n \in \llbracket 0, p+q \rrbracket, \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

(c) En déduire une expression de  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

(d) Déterminer  $T_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2$ .

3. (a) Soient  $p \leq k \leq n$  trois entiers naturels.

Montrer que :  $\binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \binom{n}{k} \binom{k}{p}$ .

(b) En déduire une expression de :  $S_1 = \sum_{p=0}^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p}$ .

(c) Que dire de  $S_2 = \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p}$  ?