Corrigé du DS n°2

Exercice 1 : Résolution d'une inéquation

1. L'inéquation (E) est définie pour les réels x tels que : $\sin(x) \neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.}$

2. Soit $x \in \mathcal{D}$. Alors $\dfrac{\cos^2(x)}{\sin(x)} \geqslant \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\cos^2(x)}{\sin(x)} - \dfrac{3}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\cos^2(x) - 3\sin(x)}{2\sin(x)} \geqslant 0$

   Mais $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ donc $(E) \Leftrightarrow \dfrac{2\big(1-\sin^2(x)\big) - 3\sin(x)}{\sin(x)} \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{(E) \Leftrightarrow \dfrac{-2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2}{\sin(x)} \geqslant 0.}$

3. On cherche les éventuelles racines du trinôme P en calculant son discriminant :
   $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 25 > 0$

   donc P admet deux racines réelles $\alpha = \dfrac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times (-2)} = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times (-2)} = -2$.

   La forme factorisée du trinôme P est donc : $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ P(t) = -2\big(t - \tfrac{1}{2}\big)\big(t+2\big).}$

4. D'après les deux questions précédentes, on a :
$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \frac{-2\big(\sin(x) - \frac{1}{2}\big)\big(\sin(x) + 2\big)}{\sin(x)} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\big(\sin(x) - \frac{1}{2}\big)\big(\sin(x) + 2\big)}{\sin(x)} \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\sin(x) - \frac{1}{2}}{\sin(x)} \leqslant 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbf{R},\ \sin(x) + 2 > 0.\end{aligned}$$
   La fonction sinus étant 2π-périodique, il suffit de dresser un tableau de signes sur $]0, 2\pi[$:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		2π
$\sin(x) - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\sin(x)$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0
quotient	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$

   Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(\left]2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right[\right).}$

Exercice 2 : Une loi des tangentes

1. D'après le cours : $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ \sin(\pi - t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - t) = -\cos(t).}$

   On en déduit si $\cos(t) \neq 0$ que : $\tan(\pi - t) = \dfrac{\sin(\pi - t)}{\cos(\pi - t)}$ donc $\boxed{\forall t \in \mathcal{D}_{\tan},\ \tan(\pi - t) = -\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}.}$

2. $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \quad \text{et} \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).}$

3. $\tan(a) + \tan(b) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)} + \dfrac{\sin(b)}{\cos(b)} = \dfrac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}$

   donc vu ce qui précède : $\boxed{\tan(a) + \tan(b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}.}$

4. Puisque $a + b + c = \pi$, alors $c = \pi - (a+b)$ donc : $T = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)} + \tan\big(\pi - (a+b)\big)$.

   D'après la question **1.** on obtient : $\boxed{T = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)} - \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}.}$

5. En réduisant au même dénominateur : $\dfrac{1}{\cos(a)\cos(b)} - \dfrac{1}{\cos(a+b)} = \dfrac{\cos(a+b)-\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)\cos(a+b)}$.

   Mais $\cos(a+b)-\cos(a)\cos(b) = -\sin(a)\sin(b)$ donc $\dfrac{1}{\cos(a)\cos(b)} - \dfrac{1}{\cos(a+b)} = -\dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)\cos(a+b)}$

   Enfin d'après la définition de la tangente : $\boxed{\dfrac{1}{\cos(a)\cos(b)} - \dfrac{1}{\cos(a+b)} = -\dfrac{\tan(a)\tan(b)}{\cos(a+b)}.}$

6. D'après les questions **4.** et **5.**, on a : $T = -\sin(a+b) \times \dfrac{\tan(a)\tan(b)}{\cos(a+b)} = -\tan(a+b)\tan(a)\tan(b)$.

   Enfin d'après la question **1.**, $-\tan(a+b) = \tan\big(\pi - (a+b)\big) = \tan(c)$.

   En conclusion : $\boxed{T = \tan(a)\tan(b)\tan(c).}$

Problème : étude d'une fonction

f est définie par son expression : $f(x) = \cos(x) - \sin^2(x)$.

1. **Propriétés générales**
   (a) $\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbf{R}.}$

   (b) $f(0) = 1, \quad f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}, \quad f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\dfrac{5}{4}$ et $f(\pi) = -1$.

   (c) $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) - \sin^2(x+2\pi) = \cos(x) - \sin^2(x)$
   car les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
   Ainsi : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x+2\pi) = f(x)$, soit : $\boxed{f \text{ est périodique de période } 2\pi.}$

   (d) L'ensemble de définition de f est centré.
   $\forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = \cos(-x) - \sin^2(-x) = \cos(x) - (-\sin(x))^2$
   car les fonctions cosinus et sinus sont respectivement paire et impaire.
   Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = \cos(x) - \sin^2(x) = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

   (e) On peut donc se contenter d'étudier la fonction f sur l'intervalle $I = [0, \pi]$.
   On complètera ensuite le tracé de sa courbe représentative Γ en effectuant :
   - une symétrie axiale d'axe (Oy), car f est paire,
   - des translations horizontales de vecteurs $2\pi\,\overrightarrow{i}$, car f est 2π-périodique.

2. **Variations**
   (a) Par opérations, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}.}$
   $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = -\sin(x) - 2\cos(x)\sin(x)$, soit : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = -\sin(x)(1+2\cos(x)).}$

   (b) Sur $I = [0, \pi]$, $1 + 2\cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$.

   $\boxed{\text{L'ensemble-solution de l'inéquation } 1 + 2\cos x \geqslant 0 \text{ sur } I \text{ est } \mathcal{S} = \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right].}$

   (c) $\forall x \in I$, $\sin(x) \geqslant 0$ et ne s'annule qu'en 0 et en π.
   Ainsi, $f'(x)$ est de signe opposé à $1 + 2\cos x$ sur l'intervalle I. On en déduit :
   - $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \left]0, \dfrac{2\pi}{3}\right[$,
   - $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right[$,
   - $f'(x) = 0$ pour $x \in \{0, \dfrac{2\pi}{3}, \pi\}$.

(d) Tableau de variations de f sur l'intervalle I :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	-1

3. **Racine de f**

(a) $\boxed{\forall a \in \mathbf{R},\ \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a).}$

(b) $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{1 - \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{1 + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \dfrac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}$

Mais $\forall a \in \mathbf{R},\ \cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc : $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \cos(2 \times \frac{x}{2})$ d'après une formule de duplication du cosinus.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0,\pi[,\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(x).}$

(c) Soit $x \in [0,\pi[$. On a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) - \sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-t^2}{1+t^2} - \left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 0$

donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow (1-t^2)(1+t^2) - (2t)^2 = 0$. Ainsi, $\boxed{\forall x \in [0,\pi[,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow t^4 + 4t^2 - 1 = 0.}$

(d) On pose $u = X^2$, alors $X^4 + 4X^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 4u - 1 = 0$.
On résout cette équation du second degré.

$\Delta = 20 > 0$ donc on a deux solutions : $u_1 = \dfrac{-4-\sqrt{20}}{2} = -2 - \sqrt{5}$ ou $u_2 = -2 + \sqrt{5}$.

Ainsi, $X^4 + 4X^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 = -2 - \sqrt{5}$ ou $X^2 = -2 + \sqrt{5}$. Mais $X^2 \geqslant 0$ donc $X^2 = -2 + \sqrt{5}$.

Conclusion : $\boxed{\forall X \in \mathbf{R},\ X^4 + 4X^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow X = \sqrt{-2+\sqrt{5}} \text{ ou } X = -\sqrt{-2+\sqrt{5}}.}$

(e) $x \in [0,\pi[$ donc $\dfrac{x}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \geqslant 0$.

On a donc $\boxed{t = \sqrt{-2+\sqrt{5}}.}$

(f) Soit $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha) = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$.

On a alors : $t = \tan\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$ donc par définition de α, on a : $\dfrac{x_0}{2} = \alpha$ soit $\boxed{x_0 = 2\alpha.}$

Remarque : on verra bientôt que α se note : $\alpha = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right)$.

4. **Représentation graphique de f**