Corrigé du DM n°3

Exercice 1 :

1. (a) Lemme du pion :
$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1)!)} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

   (b) Généralisation du lemme du pion :
   Si $p = 1$, on retrouve le lemme du pion énoncé ci-dessus.
   Dans le cas général :
$$\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \frac{(n-p)!}{(k-p)!(n-k)!} \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{k!}{p!(k-p)!} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}.$$

   (c) Soit $n \geqslant 1$. Alors :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} && \text{d'après le lemme du pion,}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} && \text{par linéarité}\\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} && \text{en effectuant un glissement d'indices}\\ &= n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1} && \text{en reconnaissant une somme du binôme.}\end{aligned}$$

2. (a) Dérivée de la fonction f :
   f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ en tant que fonction polynomiale.
   - Si $n = 0$, alors $f' = 0$.
   - Si $n > 0$, alors : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = n(x+1)^{n-1}}$

   (b) Expression de f sous forme de somme :
   D'après la formule du binôme de Newton : $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.}$

   (c) Autre expression de f' :
   Par linéarité de la dérivée, on obtient pour $n > 0$: $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}.}$

   (d) Un calcul de somme :
   Si $n = 0$, l'égalité est vérifiée car une somme vide est nulle.
   Si $n > 0$, on utilise les deux expressions précédentes pour $f'(1)$:
   $f'(1) = n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}1^{k-1}$ donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.}$

   (e) Somme obtenue en considérant f'' :
   Soit $n \geqslant 2$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = n(n-1)(x+1)^{n-2}$ d'une part, et $f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}$ d'autre part.
   On identifie les deux expressions obtenues pour $f''(1)$: $\boxed{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.}$

   (f) Calcul de : $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$
   Soit $n \geqslant 2$.
   $\forall k \in [\![1,n]\!],\ k^2 = k(k-1)+k$, donc :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}\end{aligned}$$
   On factorise par $n2^{n-2}$: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.}$

Exercice 2 :

1. $S = \sum_{k=0}^{6} \omega^k$ est une somme géométrique de raison ω différente de 1 : $S = \dfrac{1-\omega^7}{1-\omega}$.

   De plus, $\omega^7 = \left(e^{2i\pi/7}\right)^7 = e^{2i\pi} = 1$ (formule de Moivre), donc $\boxed{S = 0.}$

2. Soit $k \in \mathbf{Z}$ un entier. Alors $\omega^{7+k} = \omega^7 \times \omega^k = \omega^k$: $\boxed{\forall k \in \mathbf{Z},\ \omega^{7+k} = \omega^k.}$

3. $A + B = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = S - \omega^0 = S - 1$ donc $\boxed{A + B = -1.}$

   $AB = (\omega^3 + \omega^5 + \omega^6)(\omega + \omega^2 + \omega^4) = \omega^4 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$ en développant,

   $AB = \omega^4 + \omega^5 + 1 + \omega^6 + 1 + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^3$ en utilisant le résultat de la question **2**,

   $AB = 3 + A + B$ donc $\boxed{AB = 2.}$

4. Les complexes A, B vérifient le système somme-produit : $\begin{cases} A + B = -1 \\ AB = 2 \end{cases}$

   donc A, B sont solutions de l'équation : $X^2 + X + 2 = 0$.

   Cette équation a pour discriminant $\Delta = -7$ et pour racines complexes conjugués :

   $$\boxed{z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.}$$

   Ainsi, $\boxed{(A, B) = (z_1, z_2) \text{ ou } (A, B) = (z_2, z_1).}$

5. $\omega^4 = \left(e^{2i\pi/7}\right)^4 = e^{8i\pi/7} = e^{i\pi/7} \times e^{7i\pi/7} = -e^{i\pi/7} = -\cos(\pi/7) - i\sin(\pi/7)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(\omega^4) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).}$

6. $0 < \dfrac{\pi}{7} < \dfrac{2\pi}{7} < \dfrac{\pi}{2}$ et la fonction *sinus* est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right).}$

   On en déduit que : $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(\omega) + \mathrm{Im}(\omega^2) + \mathrm{Im}(\omega^4) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right) > \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) > 0$,

   donc $\boxed{\mathrm{Im}\, B > 0.}$

7. $\mathrm{Im}(z_1) = \dfrac{\sqrt{7}}{2} > 0$ et $\mathrm{Im}(z_2) = -\dfrac{\sqrt{7}}{2} < 0$ donc $B = z_1$. Conclusion : $\boxed{A = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}.}$