Formes algébrique, trigonométrique (exponentielle) :

1. Donner la forme algébrique de : $z = (1+i)^{2024}$
2. Donner la forme exponentielle de : $z = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1-i)^3}$
3. Donner la forme algébrique de : $z = \dfrac{3+i}{2-i} - \dfrac{1-3i}{1+i}$
4. Donner la forme algébrique de : $z_n = 1 + i + i^2 + \ldots + i^n$ $(n \in \mathbf{N})$.
5. Donner la forme algébrique de : $z = \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{20}$.
6. Donner la forme algébrique de : $z = \left(\dfrac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}\right)^{5}$.
7. Donner la forme algébrique de : $z = \left(\dfrac{-1+3i\sqrt{3}}{10-2i\sqrt{3}}\right)^{6}$.
8. Soit $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Déterminer la forme trigonométrique de : $z = \dfrac{1}{i+\tan\theta}$.
9. Calculer de deux façons le complexe $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Utilisation de $|z|^2 = z \times \overline{z}$ ou $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ ou $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$:

1. Montrer que pour tous complexes z, z', on a : $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$.
2. Montrer que pour tout complexe z, on a : $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 2(1+|z|^2)$.
3. Soient a, b, c trois complexes de module 1. Montrer que : $|ab+bc+ca| = |a+b+c|$.
4. Soient a, b deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$. Montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.
5. Soit a un complexe de module 1 tel que $a \neq 1$. Montrer que la partie réelle de $\dfrac{1}{1-a}$ vaut $\dfrac{1}{2}$.
6. (a) Montrer que pour tout complexe z : $(z+|z|)^2 = 2z(\mathrm{Re}(z)+|z|)$.
   (b) En déduire que si $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, alors $z = \left(\dfrac{z+|z|}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}(z)+2|z|}}\right)^2$.
   (c) *Application* : À l'aide de cette formule, déterminer rapidement un complexe t tel que $t^2 = 3+4i$.
7. Soient a, b, c trois complexes de module 1 tels que : $a+b+c = 1$.
   On cherche à prouver que l'un des trois est nécessairement égal à 1.
   (a) Montrer que : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$.
   (b) En déduire que : $ab+bc+ca = abc$. On notera $\lambda = abc$.
   (c) Exprimer le polynôme $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ en fonction de λ.
   (d) Conclure.

Équations dans C :

Rappel : les équations à coefficients complexes sont hors-programme, les exercices portant sur ce thème devront être guidés. Seules les équations du type $z^n = a \in \mathbf{C}$ sont au programme.

1. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z^2 = 2z - 5$.
2. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z^2 + 4z = -5$.
3. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $3z^2 + z + 1 = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z + \dfrac{10}{z} = 6$.
5. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

6. (a) On pose $\Delta = -3 + 4i \in \mathbf{C}$.
   Déterminer, en utilisant sa forme algébrique, un nombre complexe δ tel que : $\delta^2 = \Delta$.
   (b) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $\dfrac{1}{4}z^2 + (1+i)z + 3 - 2i = 0$.
7. (a) On pose $\delta = 3 - 4i$. Calculer δ^2.
   (b) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$.
   Indication : $\forall a, b \in \mathbf{C}$, $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$.
8. On considère dans $\mathbf{C}$ l'équation (E) : $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.
   (a) Déterminer la forme trigonométrique du complexe $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.
   (b) Résoudre l'équation (E).
9. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$.
   En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation : $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.
10. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $(z+1)(z-i) = z^2 - 3$.
11. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z - \overline{z} + 5 = 0$.
12. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $iz + (2+3i)\overline{z} = 1$.
13. Résoudre dans $\mathbf{C}^2$ le système : $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$.
14. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z^4 = \dfrac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}$.
15. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z^2 = \overline{z}$.
16. Soit θ un réel. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z^6 - 2z^3\cos(\theta) + 1 = 0$.
17. Soit $a \in \mathbf{R}$. Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ le système : $\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$
18. Soit $\alpha \in [0, \pi]$.
    (a) Résoudre l'équation : $z^2 - 2^{\alpha+1}\cos(\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$.
    (b) Déterminer les valeurs de α pour que cette équation admette deux solutions z_1, z_2 tels que les points $A(z_1), B(z_2)$ et $O(0)$ forment les sommets d'un triangle équilatéral.
19. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $(z-1)^n = z^n$.
    Montrer que les images dans le plan des solutions sont toutes sur une droite verticale.

Sommes complexes :

1. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1 + i\sqrt{3})^k$.
   Écrire le complexe S_n sous forme algébrique.
2. Exprimer en fonction de $n \in \mathbf{N}^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$ la somme :
$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \ldots + \cos((2n-1)\theta)$$
3. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$.
   (a) Calculer $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$.
   (b) Calculer $\dfrac{\omega}{1+\omega^2} + \dfrac{\omega^2}{1+\omega^4} + \dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}$.
   (c) En déduire $\dfrac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \dfrac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \dfrac{1}{\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}$.
4. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Calculer : $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\cos(a + kb)$.
   Indication : définir S_n et calculer $C_n + iS_n$.

Ensembles dans $\mathbf{C}$:

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que : $(z+1)(\overline{z}-2) \in \mathbf{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que : $\dfrac{z+2i}{z-4i} \in \mathbf{R}$.
3. Soit $z \in \mathbf{C}$, de forme algébrique : $z = a+ib,\ (a,b) \in \mathbf{R}^2$.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que : $\dfrac{z-2}{2z+i} \in \mathbf{R}$.
4. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des complexes z tels que :
   a) $z^2 \in \mathbf{R}$ **b)** $z^2 \in \mathbf{R}_+$ **c)** $z^2 \in \mathbf{R}_-$ **d)** $z^2 \in i\mathbf{R}$
5. Soit $z \in \mathbf{C}$. On pose : $Z = z^2 - 2iz + 2$.
   Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des complexes z tels que Z est réel.
6. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que : $\mathrm{Re}(z^3) = \mathrm{Im}(z^3)$.
7. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbf{Z}$ a-t-on $(1+i\sqrt{3})^n \in \mathbf{R}_+$?
8. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $\left|\dfrac{z-2}{iz+3}\right| = 1$. Représenter les solutions dans le plan complexe.
9. Déterminer puis représenter dans le plan complexe l'ensemble des complexes z tels que $z^2, 1-z$ et $\overline{z}$ ont le même module.
10. (a) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que : $z^2+z+1 \in \mathbf{R}$.
    (b) (*) En déduire l'ensemble des complexes z tels que les images de z, z^2 et z^4 sont alignées.
11. (*) Déterminer, puis représenter dans le plan complexe l'ensemble des ponts d'affixe z tels que les points d'affixe $1, z, 1+z^2$ sont alignés.
12. (*) Soit $z \in \mathbf{C}$. Soient A, B, C les images respectives dans le plan complexe de $z, 3z+2, iz+2$.
    (a) Montrer que, si $z = -1-i$, alors le triangle OBC est rectangle en O.
    (b) Déterminer et représenter l'ensemble des complexes z tels que OBC est rectangle en O.
13. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{C} \setminus \{-i\}$ par : $f(z) = \dfrac{z-2}{z+i}$.
    (a) **Informatique** : On décide de modéliser un complexe $z = a+ib$ par la liste $Lz = [a, b]$.
       a. Écrire une fonction `somme` d'arguments deux listes L_1, L_2 représentant des complexes z_1, z_2, et renvoyant la liste L représentant le complexe $z_1 + z_2$.
       b. Même question pour une fonction `produit`.
       c. Même question pour une fonction `inverse`.
       d. En déduire une définition informatique de la fonction f.
    (b) Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que : $|f(z)| = 1$.
    (c) Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que : $f(z) \in \mathbf{R}$.
    (d) Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que : $f(z) \in i\mathbf{R}$.

    On pourra nommer A le point d'affixe 2, et B le point d'affixe $-i$.
14. Le but de cet exercice est de déterminer les complexes $z \neq 0$ tels que $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$.
    (a) Soit $y \in \mathbf{R}$. On définit le polynôme $P(X) = X^2 + 2(y^2-1)X + y^4 - 6y^2 + 1$.
       Déterminer la forme factorisée de $P(X)$.
    (b) On pose $z = x+iy \quad (x, y \in \mathbf{R})$.
       Montrer que $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow P(x^2) = 0$.
    (c) Représenter géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$.
15. (a) On rappelle que les commandes :
    ```
    >>> plt.plot([a,c], [b,d])
    >>> plt.show()
    ```
    permettent de représenter le segment $[MN]$ défini par les points $M(a,b)$ et $N(c,d)$.
    `plt` désigne le module `pyplot` importé de la bibliothèque `matplotlib`.

Écrire une fonction d'argument $L_z = [x, y]$ représentant un complexe $z = x + iy \in \mathbf{C}^\star$, et traçant les segments $[MN]$ et $[MP]$ où les points M, N, P sont respectivement d'affixes : $z, z^2, \dfrac{1}{z}$.

(b) Déterminer le lieu des points $M(z)$ d'affixe $z \in \mathbf{C}^\star$ tels que les points $M(z)$, $N(z^2)$, $P(\frac{1}{z})$ sont alignés.

Fresnel :

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) + \sqrt{3} = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $\sqrt{2}\sin(3 - x) + \sqrt{2}\cos(x - 3) = 1$.
3. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation : $\cos(2t) - \sqrt{3}\,\sin(2t) - 1 \geqslant 0$.

Linéarisations (ou formules d'Euler) :

1. Déterminer une primitive de : $t \longmapsto (\cos t)^4$
2. Linéariser l'expression : $A(x) = (\sin x)^4$.
3. Linéariser l'expression : $B(x) = \cos^3(2x)\sin(x)$.
4. Linéariser l'expression : $C(x) = \sin^4(3x)\cos x$.
5. Linéariser l'expression : $D(x) = \cos^2(3x)\sin^3(2x)$.
6. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $z_n = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$ est un entier relatif.

Anti-linéarisations :

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $\cos(3x) - \cos(x) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $\cos(4x) + 2\cos^2(x) = 0$.
3. Résoudre sur $]-\pi, \pi]$ l'équation : $4\sin(5t) + 5\sin t = 0$.
4. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Angle moitié :

1. Soit $a \in [0, 2\pi[$. Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + e^{ia}$.
2. Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Déterminer la forme exponentielle de $z = \dfrac{1 - i}{1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}$.
3. Soient a, b deux complexes de module 1 tels que $a \neq b$.
   Montrer que : $\forall z \in \mathbf{C}$, $\dfrac{z + ab\overline{z} - a - b}{a - b} \in i\mathbf{R}$.

Autres :

1. Montrer que pour tout complexe z, on a : $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leqslant \sqrt{2}\,|z|$. Dans quel cas a-t-on égalité ? Interprétation géométrique ?
2. (a) Soit $z \in \mathbf{C}^\star$ un nombre complexe non nul. On note r son module, et θ un argument de z.
   On suppose que $z^5 = -1$. Écrire des relations portant sur r et θ traduisant cette hypothèse.
   En déduire les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation : $z^5 = -1$.

   (b) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ le polynôme : $P = X^{10} - 31X^5 - 32$.
   Factoriser entièrement le polynôme P dans $\mathbf{R}[X]$, puis dans $\mathbf{C}[X]$.

   (c) En déduire que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
3. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que, pour tous complexes a, b non nuls, on a :
$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow a = jb \quad \text{ou} \quad a = j^2 b$$
4. **Informatique** : En langage *Python*, on décide de représenter un complexe non nul z sous la forme d'une liste `[r, theta]`, où r est le module du complexe z, et θ en est un argument.

   (a) Écrire une fonction `produit` prenant pour arguments deux listes représentant des complexes z_1 et z_2, et renvoyant une liste représentant le complexe $z_1 \times z_2$.

(b) Écrire une fonction `quotient` prenant pour arguments deux listes représentant des complexes z_1 et z_2, et renvoyant une liste représentant le complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$.

(c) Écrire une fonction `puissance` prenant pour argument une liste représentant un complexe z et un entier n, et renvoyant une liste représentant le complexe z^n.

(d) On définit par récurrence une suite complexe (z_n) par :

$$z_0, z_1 \in \mathbf{C}^\star, \quad \forall n \in \mathbf{N},\ z_{n+2} = \frac{z_{n+1}}{(z_n)^2}$$

Définir une fonction d'arguments $n \in \mathbf{N}$, et Z_0, Z_1 deux listes représentant les complexes z_0, z_1, et renvoyant une liste Z_n représentant le complexe z_n.

5. Soient a, b, c, d quatre entiers naturels. On pose $n = a^2 + b^2$ et $p = c^2 + d^2$.
Montrer qu'il existe des entiers q et r tels que : $np = q^2 + r^2$.
On pourra poser : $z_1 = a + ib$ *et* $z_2 = c + id$.

Application : on pose $n = 1^2 + 6^2 = 37$ et $p = 3^2 + 5^2 = 34$. On donne $np = 37 \times 34 = 1258$.
Déterminer des entiers q et r tels que : $q^2 + r^2 = 1258$.

Informatique : En langage *Python*, écrire une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}^\star$ renvoyant la liste (éventuellement vide) de tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que : $a^2 + b^2 = n$.

6. On pose $u = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$, et $S = u + u^2 + u^4$.

(a) Calculer u^7, puis montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} u^k = 0$.

(b) Exprimer $\overline{S}$ en fonction de u.

(c) Montrer que $S + \overline{S} = -1$, puis que $S \times \overline{S} = 2$.

(d) Représenter sur un schéma les points M_k d'affixe u^k pour $k \in [\![0, 6]\!]$.

(e) Préciser le signe de $\mathrm{Im}(S)$.

(f) Déterminer S.

(g) Montrer que : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) = -\dfrac{1}{2}$

et que : $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.