I Généralités

1. Un peu de vocabulaire
2. Suites majorées, minorées, bornées
3. Monotonie
4. Suites extraites

II Convergence

1. Définition (→ *Annexe*)
2. Théorèmes de convergence (→ *Annexe*)
3. Opérations sur les limites (→ *Annexe*)

III Limites et inégalités

1. Signe d'une suite de limite non nulle
2. Passage à la limite dans les inégalités (→ *Annexe*)
3. Théorème d'encadrement et de comparaison (→ *Annexe*)

IV Cas des suites monotones

1. Propriété de la borne supérieure dans $\mathbf{R}$
2. Théorème de convergence monotone (→ *Annexe*)
3. Suites adjacentes (→ *Annexe*)

V Comparaison des suites réelles

1. Relation de négligeabilité (→ *Annexe*)
2. Suites équivalentes (→ *Annexe*)

Annexes

2.1 Suite convergente : La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge** vers le réel ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

2.2a Divergence vers $+\infty$: La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **diverge** vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall\, A \in \mathbf{R}, \quad \exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant A$$

2.2b Divergence vers $-\infty$: La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **diverge** vers $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall\, A \in \mathbf{R}, \quad \exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant A$$

2.4a Unicité de la limite : Si (u_n) est une suite réelle convergente, alors sa limite est unique.

2.4b Convergence et suites extraites : $\lim u_n = \ell \Leftrightarrow \lim u_{2n} = \ell$ et $\lim u_{2n+1} = \ell$

2.4c : Toute suite convergente est bornée.

2.5 Opérations sur les limites : $\ast$ **Somme**

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

$\ast$ **Produit**

$\lim u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$\ast$ **Inverse**

$\lim u_n$	$\ell \neq 0$	0	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	FI	$+\infty$	$-\infty$	0	0

3.2 Passage à la limite :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que : $\exists\, n_0 \in \mathbf{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$ ou $u_n < v_n$
Alors, on a : $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

3.3 Théorème d'encadrement : Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites réelles telles que :

- les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbf{R}$
- $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

Alors, la suite (v_n) converge, et sa limite est ℓ.

3.4 Suite bornée et suite convergente vers 0 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0.
Alors, la suite $(u_n \times v_n)$ converge vers 0.

3.5 Théorème de comparaison : Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$.

- Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.
- Si la suite (v_n) diverge vers $-\infty$, alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

4.2 Théorème de convergence monotone :

- Toute suite réelle (u_n) croissante et majorée converge et $\lim u_n = \sup \{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
- Toute suite réelle (u_n) croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite réelle (u_n) décroissante et minorée converge et $\lim u_n = \inf \{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
- Toute suite réelle (u_n) décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

4.3a Définition des suites adjacentes : Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si et seulement si l'une est croissante, l'autre est décroissante, et leur différence converge vers 0.

4.3b Théorème des suites adjacentes :
Si (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes, alors elles convergent et ont même limite $\ell \in \mathbf{R}$.
De plus, on a (en appelant (u_n) la suite croissante) : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant v_n \leqslant v_0$

5.1 Relation de négligeabilité : (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si et seulement si : $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
On note alors : $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

5.2 Opérations sur les quantités négligeables :
Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) des suites réelles. Soient $\lambda \in \mathbf{R}^\star$ et $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$.

- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{o}(\lambda v_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n\, w_n = \mathrm{o}(v_n\, w_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $w_n = \mathrm{o}(x_n)$, alors $u_n\, w_n = \mathrm{o}(v_n\, x_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $(u_n)^\alpha = \mathrm{o}((v_n)^\alpha)$, dès lors que ces quantités sont bien définies.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\dfrac{1}{v_n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n + v_n = \mathrm{o}(w_n)$.

5.3 Croissances comparées : On note ici $<<$ le fait d'être « négligeable devant ».
Soient $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$ trois réels. Alors on a : $(\ln n)^\alpha \ << \ n^\beta \ << \ a^n \ << \ n! \ << \ n^n$

5.4 Suites équivalentes : Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles.
La suite (u_n) est **équivalente** à la suite (v_n) si et seulement si : $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
On note alors : $u_n \sim v_n$.

5.5 Opérations sur les suites équivalentes : $\alpha \in \mathbf{R}$

- $u_n = \mathrm{o}(v_n) \ \Rightarrow\ u_n + v_n \sim v_n$
- $u_n \sim v_n \ \Leftrightarrow\ v_n \sim u_n$
- $u_n \sim v_n \ \Rightarrow\ \alpha u_n \sim \alpha v_n$
- $(u_n \sim v_n \ \wedge\ v_n \sim w_n) \ \Rightarrow\ u_n \sim w_n$
- $u_n \sim v_n \ \Rightarrow\ (u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$
- $(u_n \sim v_n \ \wedge w_n \sim x_n) \ \Rightarrow\ u_n\, w_n \sim v_n\, x_n$
- $(u_n \sim v_n \ \wedge\ w_n \sim x_n) \ \Rightarrow\ \dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$

5.6 Nature des suites équivalentes : **Deux suites équivalentes sont de même nature.**
Si l'une converge vers ℓ, alors l'autre aussi. Si l'une diverge vers $+\infty$, alors l'autre aussi...

5.7a Équivalents usuels en 0 : Soit (u_n) une suite réelle convergente vers 0. Alors on a :

- $\sin u_n \sim u_n$
- $\tan u_n \sim u_n$
- $\cos u_n - 1 \sim -\dfrac{(u_n)^2}{2}$
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \quad (\forall \alpha \in \mathbf{R})$

5.7b Autre équivalent usuel : Une suite polynomiale est équivalente à son monôme dominant.
Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ avec $a_p \neq 0$, alors $P(n) \sim a_p n^p$