Systèmes 2×2 "simples" : Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ les systèmes suivants

$$(S_1)\begin{cases} x+y = -\pi \\ x-y = 2\pi \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} 3x+4y-1 = 0 \\ 1-3y+4x = 0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 4a-6b = 1 \\ -6a+9b = 0 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} 5n+7p = 22 \\ 5n-7p = 8 \end{cases}$$

Systèmes $n \times p$ "simples" : Résoudre dans $\mathbf{R}^p$ les systèmes suivants

$$(S_5)\begin{cases} 5x+2y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$$

$$(S_6)\begin{cases} 3x+y+2z=2 \\ 5x+y-3z=1 \\ x-y-4z=4 \end{cases}$$

$$(S_7)\begin{cases} 2x+4y+z=3 \\ 5x-y+z=1 \\ x-3y-z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$$

$$(S_8)\begin{cases} 5x+4y+31z+7t=13 \\ 2x+2y+14z+4t=6 \\ x+3z-t=1 \end{cases}$$

$$(S_9)\begin{cases} 4x+3y+z=3 \\ x+2y+4z=-3 \\ 6x+7y+9z=-3 \end{cases}$$

$$(S_{10})\begin{cases} 3x-y-z=1 \\ 5x+3y=-4 \\ x-4y+2z=23 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

$$(S_{11})\begin{cases} 3a+5b+4c-3d=10 \\ a+3b-2c+5d=-2 \\ 2a-b+c-9d=-1 \end{cases}$$

$$(S_{12})\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x+2y+z-2t=0 \\ 3x+2z-t=4 \end{cases}$$

$$(S_{13})\begin{cases} 2x+2y-5z-t=-1 \\ x+y-2z+t=2 \\ 3x-y+3z-2t=-9 \\ 4x+4z+8t=8 \end{cases}$$

$$(S_{14})\begin{cases} 10a+3b-c=-3 \\ 4a-b-2c=-1 \\ -a+2b+3c=5 \\ 2a+b+c=3 \end{cases}$$

$$(S_{15})\begin{cases} 5x-3y+z=-2 \\ 3x+y-3z=8 \\ x+3y+6z=1 \\ 2x-y+4z=-4 \end{cases}$$

$$(S_{16})\begin{cases} 2x-y+3z-t-1=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-4y-z-4t-3=0 \end{cases}$$

$$(S_{17})\begin{cases} 3x+y-z+4t=16 \\ x+2y+2t=7 \\ -x+y+3z+t=-1 \\ 4y+2z+7t=19 \end{cases}$$

$$(S_{18})\begin{cases} 2x-y+z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \\ 3x+2y+z+2t=2 \end{cases}$$

$$(S_{19})\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 3x+y=4 \\ 5x-y+z=-1 \\ 2x+2y+3z=5 \end{cases}$$

$$(S_{20})\begin{cases} 3x-y+z-3t=0 \\ x+y-z+t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \\ -x+3y-z+t=0 \end{cases}$$

$$(S_{21})\begin{cases} 2x+2y-5z-t=-1 \\ x+y-2z+t=2 \\ 3x-y+3z-t=0 \\ 4x+4z+9t=17 \end{cases}$$

$$(S_{22})\begin{cases} -2x+2y+z+t=6 \\ x+3y-z-12t=7 \\ -2x-8y-3z-7t=-40 \\ 4x+y+2t=11 \\ 2x+3y+z+3t=17 \end{cases}$$

$$(S_{23})\begin{cases} 2x+2y-5z-t=-1 \\ x+y-2z+t=2 \\ 3x-y+3z-t=0 \\ 4x-y+4z-2t=1 \end{cases}$$

- À quelle condition le système $(S_{24})\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & a \\ x-y & = & 2 \\ 2x+3y & = & 3 \end{array}\right.$ est-il compatible ?

  Résoudre (S_{24}) dans ce cas.

- À quelle condition le système $(S_{25})\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & a \\ x+y+z & = & b \\ y+z+t & = & c \\ z+t & = & d \end{array}\right.$ est-il compatible ?

- Soit $(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$, on pose $(S_{26})\begin{cases} x-2y+3z=a \\ -2x+y+z=b \\ 3x-7y+11z=c \\ 4x+2y-11z=d \end{cases}$

  (a) Exprimer une condition sur les réels a,b,c,d pour que le système (S_{26}) soit compatible.

  (b) On pose $a=c=0$ et on suppose que le système (S_{26}) est compatible.
  Résoudre (S_{26}) selon la valeur de b.

- Soit $(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$, on pose $(S_{27})\begin{cases} 2x-y+3z=a \\ 4x+4y+z=b \\ x+2y-z=c \\ 3x+y+7z=d \end{cases}$

  (a) Exprimer une condition sur les réels a,b,c,d pour que le système (S_{27}) soit compatible.

  (b) On pose $a=11$ et $c=-3$. On suppose que le système (S_{27}) est compatible.
  Résoudre (S_{27}) selon la valeur de b.

Systèmes 2×2 à paramètres
Résoudre les systèmes suivants selon la valeur du paramètre m ou $\alpha\in\mathbf{R}$

$S_\alpha \begin{cases} 2x+3y=5 \\ \alpha x+(1-\alpha)y=1 \end{cases}$ $\qquad S_m \begin{cases} 2x+my=1 \\ mx+y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\qquad \Sigma_m \begin{cases} mx+8y=3 \\ x+2my=1 \end{cases}$

Systèmes $n\times p$ à paramètres
Résoudre les systèmes suivants selon la valeur du paramètre m,p,a,λ ou $\alpha\in\mathbf{R}$

1. $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-y+z=0 \\ 4x-2y+az=a \end{cases}$

2. $\begin{cases} (p^2-2)x+y+(2-p)z=2p+1 \\ 2x+y+pz=1 \\ 2px+y+z=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+my+(1-m)z=-3 \\ 2x+3my+2z=-2 \\ mx+m^2y=-3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} mx-mz=0 \\ mx+(m-1)y+(2-m)z=m+1 \\ m^2x+(1-m)y-3mz=-2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+2y+(1-\lambda)z=2 \\ 4x+(4-\lambda)y-z=10 \\ (2+\lambda)x+2y-z=2\lambda+6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ mx-2y=2 \\ 2x+y+mz=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+\alpha y-\alpha z=1 \\ y+z=0 \\ 2\alpha x+(1+\alpha)y-(1-\alpha)z=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2my+(1-m)z=2 \\ 2x+(1+4m)y+(5-m)z=1 \\ 3x+5my+(1-5m)z=0 \\ mx+(2m^2+3)y+4(m+2)z=-m-12 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+my+2mz=2 \\ 3x+(m+1)y+(2m+1)z=3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+8y+pz=2 \\ 3x+py-z=3 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} x+3y+z=-1 \\ mx-2y=1 \\ 2x+y+mz=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+my+(1-m)z=1 \\ 2x+(1+2m)y+(5-m)z=3 \\ 3x+2my+(1-5m)z=5 \\ mx+(m^2+3)y+4(m+2)z=2m+4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \alpha x+(1-\alpha)y+(1-\alpha)z=\alpha^2 \\ \alpha x+(1+\alpha)y+(1+\alpha)z=\alpha-\alpha^2 \\ x+y+z=1-\alpha \end{cases}$

14. $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} (2-m)x+2y+2z=0 \\ 2x+(5-m)y+4z=0 \\ 2x+4y+(5-m)z=0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=-1 \end{cases}$

17. Soit $p \in \mathbf{R}$. On considère le système $(S_p)\begin{cases} 2x-4y+2pz=1 \\ px+(3-2p)y+6z=3 \\ 5x-4y+9(p-2)z=5 \end{cases}$

    (a) Déterminer le rang du système (S_p) selon les valeurs de p.

    (b) Résoudre le système (S_p) pour $p=4$.

18. Soit $m \in \mathbf{R}$. On considère le système linéaire $(S_m)\begin{cases} (1+m)z-2y+3x=1 \\ mz+y+x=5 \\ (1-m)z+2y-x=-1 \end{cases}$

    (a) Déterminer le rang du système (S_m) selon les valeurs de m.

    (b) Résoudre ce système lorsque $m=1$.

Autres exercices

1. Donner une équation de la partie de $\mathbf{R}^3$ définie par : $A=\big\{(6+a-b,3-a+b,1-2a+2b),\ (a,b)\in\mathbf{R}^2\big\}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ de la forme $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ telles que : $f(1)=f(-1)=f'(1)=1$.
3. Résoudre dans $(\mathbf{R}_+^\star)^3$ le système $(S)\begin{cases} x^3y^2z^6=1 \\ x^4y^5z^{12}=2 \\ x^2y^2z^5=3 \end{cases}$
4. Déterminer des réels a,b tels que : $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{-2,-1\}$, $\dfrac{2x+5}{x^2+3x+2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$.
5. Dans une boulangerie, on paie :
    - 9 euros pour 6 croissants, 1 pain au chocolat et 1 baguette,
    - 8 euros pour 5 croissants et 2 pains au chocolat,
    - 7 euros pour 2 croissants, 2 pains au chocolat et 2 baguettes.

   Déterminer le prix d'un croissant, d'un pain au chocolat, d'une baguette.