Exercice 5 :

$S_1 = 125$ $S_2 = 70$ $S_3 = (2n+1)(3n+1)$ $T = 2024$

Exercice 6 :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(2-k^2) = \frac{1}{6}(n+2)(1-n)(2n+9)$
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n}\frac{j^2}{n} = \frac{1}{3}(2n+1)(4n+1)$
3. $\displaystyle\sum_{j=3}^{n+2}(j-2)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=n-1}^{2n}(k+3)^2 = \frac{1}{6}(n+2)(2n+3)(7n+13)$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k^2+n+3) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+18)$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a^k2^{3k}b^{-k} = \begin{cases}\frac{1-(\frac{8a}{b})^{n+1}}{1-\frac{8a}{b}} & \text{si } \frac{8a}{b}\neq 1\\ n+1 & \text{si } \frac{8a}{b}=1\end{cases}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(3^{2k+1}-3^{2k-1}\right) = 3^{2n-1}-3$
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1$
9. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = \begin{cases}n^2-1 & \text{si } a=0\\ 1-n^2 & \text{si } a=\pm\sqrt{2}\\ (1-a^2)^5\,\dfrac{1-(1-a^2)^{2n^2-2}}{1-(1-a^2)^2} & \text{sinon.}\end{cases}$

Exercice 10 : $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n}k.k! = (n+1)!$

Exercice 11 :

1. $\displaystyle A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$
2. $\displaystyle B = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k = (1-x)^n$
3. $\displaystyle C = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k} = (1-x^2)^n$
4. $\displaystyle D = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$
5. $\displaystyle E = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k = 4^n$
6. $\displaystyle F = \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}3^k = 4^n - n3^{n-1} - 3^n$
7. $\displaystyle G = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k = 4^n - 1$
8. $\displaystyle H = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k+1} = 3\times 4^n$
9. $\displaystyle K = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{3+kt} = 8(1+2^t)^n$

Exercice 12 :

1. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}a^{-j} = \left(1+\frac{1}{a}\right)^n,$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}b^k = b(1+b)^{n-1},$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$
4. $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=1}^{m}p(q^2+1) = \frac{1}{12}mn(n+1)(2m^2+3m+7),$
5. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant l\leqslant n}\frac{k}{l+1} = \frac{1}{4}n(n+1),$
6. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}a^jb^{k-j} = (1+a+b)^n.$

Exercice 13 : $\displaystyle C(t) = 2^n\cos^n(t)\cos\left(a+\frac{nt}{2}\right)$ et $\displaystyle S(t) = 2^n\cos^n(t)\sin\left(a+\frac{nt}{2}\right)$

Exercice 14 : $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k} = \frac{n!}{(n-p)!}\times\frac{1}{p!} = \binom{n}{p}.$

Correction détaillée du F de l'exercice 12 : $F = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$.

On a une somme double triangulaire. On repère : $\begin{cases} 0 \leqslant j \leqslant n \\ j \leqslant k \leqslant n \end{cases}$

ce qu'on traduit en : $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, et donc : $\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant k \end{cases}$

On peut donc écrire en inversant les sommes : $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$

On factorise par le terme ne dépendant pas de j : $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j} \right)$

et on reconnaît une somme de Newton : $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} (a+b)^k \right)$

puis on reconnaît à nouveau une somme de Newton : $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} (a+b)^k \times 1^{n-k} \right)$

$$\boxed{F = (a+b+1)^n.}$$