TD 06. Nombres complexes : corrigé

Exercice 1 : Formes algébriques de nombres complexes

1. $z_1 = 9 - 7i$
2. $z_2 = 48 + 14i$
3. $z_3 = 5$
4. $z_4 = -119 - 120i$
5. $z_5 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$
6. $z_6 = -\dfrac{8}{13} + \dfrac{1}{13}i$
7. $z_7 = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}i$
8. $z_8 = -\dfrac{8}{25} + \dfrac{6}{25}i$

Exercice 2 : Formes trigonométriques (exponentielles) de nombres complexes

1. $z_1 = 20$ ou $z_1 = 20e^0$
2. $z_2 = 7e^{i\pi}$
3. $z_3 = 7e^{\frac{i\pi}{2}}$
4. $z_4 = 3\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$
5. $z_5 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$
6. $z_6 = 2\sqrt{6}\,e^{\frac{i\pi}{3}}$
7. $z_7 = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}$
8. $z_8 = 5e^{-\frac{7i\pi}{10}}$

c'est-à-dire :

1. $z_1 = 20(\cos 0 + i\sin 0)$
2. $z_2 = 7(\cos\pi + i\sin\pi)$
3. $z_3 = 7\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$
4. $z_4 = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
5. $z_5 = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$
6. $z_6 = 2\sqrt{6}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$
7. $z_7 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
8. $z_8 = 5\left(\cos\left(-\dfrac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{10}\right)\right)$

Exercice 3 : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z_3 = \sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$

$\boxed{z_1z_2z_3 = 3\sqrt{2}e^{i\pi} = -3\sqrt{2}.}$ $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2z_3} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{1}{6\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\,i.}$ $\boxed{(z_2)^2 = 9e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}\,i.}$

Exercice 4 : Forme algébrique à l'aide d'une forme trigonométriques

$z_1 = (\sqrt{3}+i)^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5 = 2^5e^{\frac{5i\pi}{6}}$ donc $\boxed{z_1 = -16\sqrt{3} + 16i.}$

$z_2 = \dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3} = \dfrac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4}{\left(2e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)^3} = \dfrac{4e^{i\pi}}{8e^{-\frac{i\pi}{2}}} = \dfrac{1}{2}e^{\frac{3i\pi}{2}}$ donc $\boxed{z_2 = -\dfrac{i}{2}.}$

$z_3 = \left(\sqrt{2} - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{15} = \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{15} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{15} = \left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^{15} = e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc $\boxed{z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}.}$

Exercice 5 : Propriétés de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, racine cubique de l'unité

$j^3 = e^{\frac{6i\pi}{3}}$ donc $\boxed{j^3 = 1.}$

$j^2 + j + 1$ est une somme géométrique de raison $j \neq 1$, donc $j^2 + j + 1 = \dfrac{1-j^3}{1-j}$, $\boxed{j^2 + j + 1 = 0.}$

$(j-1)(j^2-1) = j^3 - j^2 - j + 1 = 2 - j^2 - j$. Or, $j^2 + j = -1$ donc $\boxed{(j-1)(j^2-1) = 3.}$

$(1+j)^3 = (-j^2)^3 = -j^6 = -(j^3)^2 = -1^2$ soit : $\boxed{(1+j)^3 = -1.}$

$(1-j)^3 = -j^3 + 3j^2 - 3j + 1$ en développant. Donc $(1-j)^3 = 3(j^2 - j)$.

Mais $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{j}$. Donc $j^2 - j = \overline{j} - j = -2i\,\mathrm{Im}(j) = -i\sqrt{3}$. Donc $\boxed{(1-j)^3 = -3i\sqrt{3}.}$

Exercice 6 : Méthode de l'arc médian

1. On vérifie en développant que : $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = \boxed{e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}$

   et $e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = \boxed{e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}$

Méthode : on utilise cette technique pour additionner deux complexes de même module.

2. $A = e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{7i\pi}{24}}\left(e^{\frac{i\pi}{24}} + e^{-\frac{i\pi}{24}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right)e^{\frac{7i\pi}{24}}$

   $B = e^{\frac{2i\pi}{3}} - i = e^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{2}} = e^{\frac{7i\pi}{12}}\left(e^{\frac{i\pi}{12}} - e^{-\frac{i\pi}{12}}\right) = 2i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{\frac{7i\pi}{12}}$

puis : $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, donc : $B = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) e^{-\frac{11i\pi}{12}}$

$C = 1 + e^{\frac{7i\pi}{6}} = e^0 + e^{\frac{7i\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{12}}\left(e^{\frac{7i\pi}{12}} + e^{-\frac{7i\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) e^{\frac{7i\pi}{12}}$

mais $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) < 0$ donc on n'a pas encore obtenu la forme exponentielle.

$C = -2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) e^{i\pi} e^{\frac{7i\pi}{12}}$ et finalement : $C = 2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) e^{-\frac{5i\pi}{12}}$

$D = 1 - e^{\frac{3i\pi}{4}} = e^0 - e^{\frac{3i\pi}{4}} = e^{\frac{3i\pi}{8}}\left(e^{-\frac{3i\pi}{8}} - e^{\frac{3i\pi}{8}}\right) = -2i\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) e^{\frac{3i\pi}{8}} = 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) e^{-\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{3i\pi}{8}}$

car $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$, donc : $D = 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}}$

3. $A = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   donc $|A|^2 = \dfrac{1}{4}\left((1+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2\right) = \dfrac{1}{4}(3 + 2\sqrt{2} + 5 + 2\sqrt{6}) = 2 + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

   De même, on trouve :

   ∗ $B = -\dfrac{1}{2} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$ et $|B| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

   ∗ $C = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$ et $|C| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

   ∗ $D = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $|D| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

4. Vu les questions précédentes, $|A| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \sqrt{2 + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$

   donc : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}}$

   $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = 1$ donc $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = 1 - \dfrac{1}{4}\left(2 + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$

   enfin, $\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right) > 0$ donc : $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}}$

<u>Exercice 7</u> : Obtenir de nouvelles valeurs de cos ou sin

1. $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ a pour module : $|z_1| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$

   et pour argument θ tel que : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}/2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta > 0 \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Ainsi, $\boxed{z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}}.}$

   On obtient de même : $\boxed{z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}.}$ Par quotient : $\boxed{z_3 = \dfrac{z_2}{z_1} = e^{\frac{i\pi}{12}}.}$

2. On calcule sous forme algébrique : $z_3 = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_2 \times \overline{z_1}}{|z_1|^2} = \dfrac{1}{4}(1+i)(\sqrt{6}-i\sqrt{2}) = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)$

   On obtient : $\mathrm{Re}(z_3) = \boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$ et $\mathrm{Im}(z_3) = \boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

   Enfin, $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)}$

<u>Exercice 8</u> : Identité du parallélogramme. **Rappel :** $\forall z \in \mathbf{C},\ |z|^2 = z \times \overline{z}$.

$$\begin{aligned} |u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)\overline{(u+v)} + (u-v)\overline{(u-v)} \\ &= (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) + (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) \quad \text{vu les propriétés du conjugué} \\ &= 2u\overline{u} + 2v\overline{v} \quad \text{en développant} \\ &= 2|u|^2 + 2|v|^2 \quad \textit{Interprétation géométrique ?} \end{aligned}$$

Exercice 9 : Inverse d'un complexe de module 1.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. Alors : $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \times \overline{z} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} = \overline{z}$

Exercice 10 : Soient $z, z' \in \mathbf{C}$ de module 1 tels que $1 + zz' \neq 0$.

On pose $Z = \dfrac{z + z'}{1 + zz'}$. On calcule $Z - \overline{Z}$:

$$\begin{aligned}
Z - \overline{Z} &= \frac{z+z'}{1+zz'} - \frac{\overline{z}+\overline{z}'}{1+\overline{z}\,\overline{z}'} \quad \text{par propriétés du conjugué}\\
&= \frac{(z+z')(1+\overline{z}\,\overline{z}') - (1+zz')(\overline{z}+\overline{z}')}{(1+zz')(1+\overline{z}\,\overline{z}')}\\
&= \frac{z + z' + z\overline{z}\,\overline{z}' + z'\overline{z}\,\overline{z}' - \overline{z} - \overline{z}' - zz'\overline{z} - zz'\overline{z}'}{(1+zz')(1+\overline{z}\,\overline{z}')}
\end{aligned}$$

Et puisque $|z| = |z'| = 1$, on a : $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ et $z'\overline{z}' = |z'|^2 = 1$ donc il reste :

$$Z - \overline{Z} = \frac{z + z' + \overline{z}' + \overline{z} - \overline{z} - \overline{z}' - z' - z}{(1+zz')(1+\overline{z}\,\overline{z}')} = 0. \qquad \boxed{Z = \overline{Z} \text{ donc } Z \text{ est un réel.}}$$

Exercice 11 : **Formule de Fresnel**

$\cos x + \sin x$ est de la forme $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$ avec $a = b = 1$.

On pose $z = a + ib = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, et on calcule $\overline{z} \times e^{i\theta}$:

$(1 - i)(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \cos(\theta) + \sin(\theta) + i(\ldots)$

donc $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \mathrm{Re}\left(\overline{z} \times e^{i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\cos x + \sin x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble solution de l'équation est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\pi + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}.}$

Exercice 12 : **Linéarisations**

1. $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) = \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos x$

   $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \dfrac{1}{8i^3}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) = \dfrac{1}{-8i}\left(2i\sin(3x) - 6i\sin(x)\right)$

   donc $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x).}$

2. $\sin^4 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \dfrac{1}{16i^4}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) = \dfrac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6\right)$

   donc $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sin^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.}$

3. $$\begin{aligned}\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 &= \frac{1}{32i^5}\left(e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}\right)\\ &= \frac{1}{32i}\left(2i\sin(5x) - 10i\sin(3x) + 20i\sin(x)\right)\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sin^5 x = \frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x).}$

4. $$\begin{aligned}\sin^2 x\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3\\ &= -\frac{1}{32}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)\\ &= -\frac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{3ix} - 2e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)\\ &= -\frac{1}{32}\left(2\cos(5x) + 2\cos(3x) - 4\cos(x)\right)\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sin^2 x\cos^3 x = -\frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{1}{16}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(x).}$

5. $\cos^3 x \sin(2x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \times \left(\dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)$
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\\ &= \frac{1}{16i}\left(e^{5ix}+3e^{3ix}+2e^{ix}-2e^{-ix}-3e^{-3ix}-e^{-5ix}\right)\\ &= \frac{1}{16i}\left(2i\sin(5x)+6i\sin(3x)+4i\sin(x)\right)\end{aligned}$$
donc $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \cos^3 x \sin(2x) = \frac{1}{8}\sin(5x)+\frac{3}{8}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(x).}$

6. $\sin(x)\sin(2x)\sin(3x) = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)\left(\dfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)$
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8i^3}\left(e^{3ix}-e^{ix}-e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)\\ &= \frac{1}{-8i}\left(e^{6ix}-e^{4ix}-e^{2ix}+e^{-2ix}+e^{-4ix}-e^{-6ix}\right)\\ &= \frac{1}{-8i}\left(2i\sin(6x)-2i\sin(4x)-2i\sin(2x)\right)\end{aligned}$$
donc $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sin(x)\sin(2x)\sin(3x) = -\frac{1}{4}\sin(6x)+\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x).}$

<u>Exercice 13</u> : Anti-linéarisations

1. $\cos(4x) = \mathrm{Re}\left(e^{4ix}\right) = \mathrm{Re}\left((e^{ix})^4\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^4\right)$ (formule de Moivre)
$= \cos^4 x + 6\cos^2 x (i\sin x)^2 + (i\sin x)^4$ (binôme de Newton)
donc : $\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)$
On remplace enfin $\sin^2(x)$ par $1-\cos^2(x)$:
$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1-\cos^2(x)) + (1-\cos^2(x))^2$
$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.}$

2. $\sin(5x) = \mathrm{Im}\left(e^{5ix}\right) = \mathrm{Im}\left((e^{ix})^5\right) = \mathrm{Im}\left((\cos x + i\sin x)^5\right)$ (formule de Moivre)
$= 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$ (binôme de Newton)
On remplace $\cos^2(x)$ par $1-\sin^2(x)$:
$\sin(5x) = 5(1-\sin^2(x))^2\sin(x) - 10(1-\sin^2(x))\sin^3(x) + \sin^5 x$
$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sin(5x) = 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x).}$

3. $\sin(6x) = \mathrm{Im}\left(e^{6ix}\right) = \mathrm{Im}\left((e^{ix})^6\right) = \mathrm{Im}\left((\cos x + i\sin x)^6\right)$ (formule de Moivre)
$= 6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x$ (binôme de Newton)
On factorise par $2\sin(x)\cos(x)$, et on note : $c = \cos(x), s = \sin(x)$:
$\sin(6x) = 2sc(3c^4 - 10c^2s^2 + 3s^4) = 2s(3c^4 - 10c^2(1-c^2) + 3(1-c^2)^2)$
$= 2sc(16c^4 - 16c^2 + 3)$
soit : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sin(6x) = 2\sin(x)\cos(x)(16\cos^4(x) - 16\cos^2(x) + 3).}$

<u>Exercice 14</u> : Équations du second degré
$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$. Le discriminant vaut : $\Delta = -8 < 0$
donc P possède deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - i\sqrt{8}}{2} = 2 - i\sqrt{2}$
et $z_2 = \overline{z_1} = 2 + i\sqrt{2}$.
$\boxed{P \text{ possède deux racines conjuguées dans } \mathbf{C} : 2 - i\sqrt{2} \text{ et } 2 + i\sqrt{2}.}$

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = 0$. C'est une équation bicarrée.
On pose $t = x^2$: l'équation devient $t^2 + t + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = -3 < 0$
donc de solutions complexes conjuguées $t_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $t_2 = \overline{t_1}$.
On a donc : $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = t_1$ ou $x^2 = t_2$.
Il s'agit donc de déterminer une racine carrée complexe. On utilise la forme exponentielle :
$t_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (c'est le complexe j de l'exercice 5) et $t_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{j} = j^2$.
On résout alors : $x^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow (re^{i\theta})^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$
et de même : $x^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$
Ainsi, $\boxed{Q \text{ possède quatre racines dans } \mathbf{C} : e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}.}$

<u>Exercice 15</u> : Systèmes somme-produit

(S_1) est un système somme-produit : $\begin{cases} x + y = 1 = S \\ xy = 2 = P \end{cases}$
donc x, y sont les solutions réelles ou complexes de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$, soit : $X^2 - X + 2 = 0$.
On calcule $\Delta = -7 < 0$ donc on a deux solutions complexes conjuguées : $z_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.
Conclusion : $\boxed{(S_1) \text{ a pour solutions les couples } (z_1, z_2) \text{ et } (z_2, z_1).}$
Remarque 1 : c'est-à-dire $x = z_1$ et $y = z_2$, ou $x = z_2$ et $y = z_1$.
Remarque 2 : on arrive rapidement à l'équation du second degré ci-dessus en procédant par substitution.

(S_2) est un système somme-produit : $\begin{cases} x + y = -1 = S \\ xy = 1 = P \end{cases}$
donc x, y sont les solutions réelles ou complexes de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$, soit : $X^2 + X + 1 = 0$.
On a déjà résolu cette équation, de solutions j et $\overline{j}$.
Conclusion : $\boxed{(S_2) \text{ a pour solutions les couples } (j, \overline{j}) \text{ et } (\overline{j}, j).}$
