DS n°3, mathématique

Durée : 3 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit.
Le sujet comporte 2 pages, numérotées de 1 à 2.

Exercice 1 : Calcul d'une somme

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$.

1. Calculer les valeurs de S_1, S_2 et S_3.
2. Définir en langage *Python* une fonction `SOMME` prenant pour argument un entier $n \geqslant 1$ et renvoyant la valeur de S_n.
3. On cherche à prouver qu'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, tel que :

$$(1) \quad \forall n \geqslant 1,\ S_n = (-1)^n P(n)$$

On pose alors : $P(n) = an^2 + bn + c$, où a, b, c sont des coefficients réels fixés.

(a) En examinant les valeurs de S_1, S_2 et S_3, montrer que la relation (1) implique :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

(b) Résoudre le système $(\mathcal{S})$ et en déduire la seule expression possible pour le polynôme P.

(c) Pour ce polynôme P, démontrer par récurrence la relation (1).

Exercice 2 : Des valeurs particulières du cosinus

Le but de l'exercice est de calculer les valeurs exactes de : $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\beta = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

On définit le nombre complexe ω par sa forme exponentielle : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Montrer que : $\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0$.
2. (a) Expliquer pourquoi : $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \beta$ et $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \alpha$.

   (b) En déduire que : $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$.
   On pourra s'intéresser à la partie réelle de la somme précédente.
3. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. On pose : $z = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)}\right)$.

   (a) Montrer que : $z = e^{ix} \cos(y)$.

   (b) En déduire l'expresion de $\cos(x)\cos(y)$ en fonction de $\cos(x+y)$ et $\cos(x-y)$.
4. Montrer que : $\alpha \times \beta = -\frac{1}{4}$.
5. En déduire les valeurs exactes de α et β.

Exercice 3 : Une somme de Newton

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(-1)^k \binom{n}{k}$.

1. Soit $k \leqslant n-1$. Exprimer en fonction de k et n la somme : $\sum_{p=k}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k}$.
2. En déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}$.
3. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, exprimer $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ à l'aide d'un unique coefficient binomial.
4. En déduire que : $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n-1}{k}$.
5. À l'aide d'un glissement d'indices, montrer que : $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$.
6. En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, la valeur de S_n.

Exercice 4 : Étude d'une fonction de la variable complexe

On pose : $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$, où z désigne une variable complexe.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Résoudre dans $\mathcal{D}$ l'équation $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

   Préciser les formes exponentielles des solutions.
3. Montrer que : $\forall z, z' \in \mathcal{D},\ f(z) = f(z') \Leftrightarrow z = z'$ ou $zz' = 1$.
4. Expliquer pourquoi : $\forall z \in \mathcal{D},\ \overline{f(z)} = f(\overline{z})$.
5. En déduire l'ensemble des complexes z tels que : $f(z) \in \mathbf{R}$.
6. Soit $z \in \mathcal{D}$ de module 1. On pose : $z = e^{i\theta}$.
   (a) Exprimer $f(z)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
   Indication : on pourra utiliser la technique de l'arc médian.
   (b) Déterminer l'ensemble des arguments $\theta \in]-\pi, \pi]$ tels que $\sum_{k=0}^{n} (f(z))^k$ converge lorsque $n \to +\infty$.