Corrigé du DS n°3

Exercice 1 : Calcul de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$

1. $S_1 = (-1)^1 1^2$ donc $\boxed{S_1 = -1}$, $S_2 = -1 + 4$ donc $\boxed{S_2 = 3}$ et $S_3 = -1 + 4 - 9$ donc $\boxed{S_3 = -6}$.
2. Traitement informatique

```
def SOMME(n) :
    s = 0
    for k in range(1,n+1) :
        s = s + (-1)**k * k**2
    return s
```

3. (a) On explicite la relation (1) lorsque $n = 1, 2$ et 3 :
   $S_1 = (-1)^1 P(1) \Leftrightarrow -1 = -(a \times 1^2 + b \times 1 + c) \Leftrightarrow a + b + c = 1$ et de même :
   $S_2 = 3 = (-1)^2(4a + 2b + c) \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 3$ et $S_3 = -6 = (-1)^3(9a + 3b + c) \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 6$.

   (b) Sous forme matricielle : $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 3 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right)$

   $\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 3 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Le système est échelonné et de rang 3 : il est de Cramer

   et possède une unique solution qu'on trouve par remontée : $L_3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

   puis $L_2 \Rightarrow b = 2 - 3a = \frac{1}{2}$ et $L_1 \Rightarrow c = 1 - a - b = 0$.

   En conclusion : $\boxed{(\mathcal{S}) \text{ possède pour unique solution } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}$

   et $\boxed{\text{l'unique polynôme } P \text{ possible est : } P(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.}$

   (c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $\mathcal{Q}_n$: « $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)$ ».

   Initialisation au rang $n = 1$: D'une part, $S_1 = -1$ et d'autre part, $(-1)^1 P(1) = -(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = -1$.
   La propriété $\mathcal{Q}_1$ est vraie.
   Hérédité à partir du rang $n = 1$: soit $n \geqslant 1$. On suppose $\mathcal{Q}_n$ vraie.
   Alors $S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = (-1)^n P(n) + (-1)^{n+1}(n+1)^2$ d'après $\mathcal{Q}_n$,
   $S_{n+1} = (-1)^n \left(P(n) - (n+1)^2\right) = (-1)^n \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - n^2 - 2n - 1\right) = (-1)^n \left(-\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} - 1\right)$
   et d'autre part, $(-1)^{n+1} P(n+1) = (-1)^{n+1} \left(\frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{2}\right) = (-1)^{n+1} \left(\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1\right)$
   Ainsi $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : $\mathcal{Q}_n$ est initialisée au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1.
   D'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

   Ainsi : $\boxed{\forall n \geqslant 1, \ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right).}$

Exercice 2 : Valeurs de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ **et** $\cos(\frac{4\pi}{5})$

1. $\sum_{k=0}^{4} \omega^k$ est une somme géométrique de raison $\omega \neq 1$, donc : $\sum_{k=0}^{4} \omega^k = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega}$.

   Mais $\omega^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$ d'après la formule de Moivre. Ainsi, $1 - \omega^5 = 0$ et $\boxed{\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0.}$

2. (a) cos est 2π-périodique et paire, donc : $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5} - 2\pi\right) = \cos\left(\frac{-4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \beta$

et $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5} - 2\pi\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \alpha$

(b) On considère la partie réelle de $\sum_{k=0}^{4} \omega^k$: $\mathrm{Re}\left(1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}}\right) = 0$

$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$$

donc $\quad 1 + \alpha + \beta + \beta + \alpha = 0$ et $\boxed{\alpha + \beta = -\frac{1}{2}.}$

3. (a) $z = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)}\right) = \frac{e^{ix}}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right)$ et d'après la formule d'Euler : $\boxed{z = e^{ix}\cos(y).}$

(b) On considère la partie réelle de z : $\boxed{\frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right) = \cos x \cos y.}$

4. On utilise la formule précédente avec $x = \frac{2\pi}{5}$ et $y = \frac{4\pi}{5}$:

$\alpha\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}(\beta + \alpha).$

Or, $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$, donc : $\boxed{\alpha\beta = -\frac{1}{4}.}$

5. α et β sont solutions du système somme-produit : $\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{1}{2} \ (= S) \\ \alpha\beta = -\frac{1}{4} \ (= P) \end{cases}$

Donc α et β sont les solutions de l'équation du second degré : $x^2 - Sx + P = 0$.

On résout cette équation : $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ de discriminant $\Delta = \frac{1}{4} - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} > 0$.

Les solutions réelles sont : $x_1 = \dfrac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\Delta}}{2}$.

$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} > 0$ et $x_2 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} < 0$. Puisque $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}}$$

Exercice 3 : Calcul de $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(-1)^k \binom{n}{k}$

1. k étant fixé, $(-1)^k \binom{n}{k}$ ne dépend pas de p donc on a une somme de constantes : $\boxed{\sum_{p=k}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} = (n-k)(-1)^k \binom{n}{k}.}$

2. Soit $n \geqslant 2$. Alors : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=k}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k}$, à l'aide de la question précédente.

C'est une somme-double triangulaire, on inverse les indices : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}.}$

3. On applique la formule de Pascal : $\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.}$

4. Si $p = 0$, alors l'égalité est évidente car $(-1)^0 \binom{n}{0} = 1 = (-1)^0 \binom{n-1}{0}$.

Si $p \in [\![1, n-1]\!]$, on sépare la somme : $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^0 \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}$

puis on utilise la question précédente pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

et le terme correspondant à $k=0$ dans la dernière somme vaut 1, donc on peut regrouper : $\boxed{\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}+\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n-1}{k}.}$

5. Par glissement d'indices, $\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}=-\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}$.

   On obtient donc une somme télescopique : $\boxed{\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^p\binom{n-1}{p}.}$

6. D'après les **questions 2 et 5**, $S_n=\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\binom{n-1}{p}$

   et on reconnaît une somme de Newton : $\boxed{\forall n\geqslant 2,\ S_n=(-1+1)^{n-1}=0.}$

Exercice 4 : Étude de la fonction $\varphi : z \longmapsto \dfrac{z}{1+z^2}$

1. f est définie en $z\in\mathbf{C}$ tel que $1+z^2\neq 0$.
   On a : $1+z^2=0\Leftrightarrow z^2=-1\Leftrightarrow z=i$ ou $z=-i$, donc $\boxed{\mathcal{D}=\mathbf{C}\setminus\{i,-i\}.}$

2. $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 1+z^2=z\sqrt{3}\Leftrightarrow z^2-z\sqrt{3}+1=0.$
   C'est une équation du second degré : $\Delta=(-\sqrt{3})^2-4\times 1\times 1=-1<0$.
   Il y a 2 solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.
   Sous forme exponentielle : $\boxed{f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow z=e^{\frac{i\pi}{6}}\quad\text{ou}\quad z=e^{-\frac{i\pi}{6}}.}$

3. Soient $z,z'\in\mathcal{D}$. On a : $f(z)=f(z')\Leftrightarrow\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{z'}{1+z'^2}\Leftrightarrow z(1+z'^2)=z'(1+z^2)$
   $\Leftrightarrow zz'^2-z'z^2+z-z'=0\Leftrightarrow zz'(z'-z)+(z-z')=0\Leftrightarrow(z'-z)(zz'-1)=0$
   $\Leftrightarrow z'-z=0$ ou $zz'-1=0$. Conclusion : $\boxed{\forall z,z'\in\mathcal{D},\ f(z)=f(z')\Leftrightarrow z'=z\quad\text{ou}\quad zz'=1.}$

4. Soit $z\in\mathcal{D}$. Par propriétés du conjugué : $\overline{f(z)}=\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{(1+z^2)}}=\dfrac{\overline{z}}{1+(\overline{z})^2}$ car $\overline{1}=1$

   donc $\boxed{\forall z\in\mathcal{D},\ \overline{f(z)}=f(\overline{z}).}$

5. Soit $z\in\mathcal{D}$. $f(z)\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\overline{f(z)}=f(z)\Leftrightarrow f(\overline{z})=f(z)$ d'après la question précédente, donc
   $f(z)\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$ ou $z\overline{z}=1$ d'après la question **3**. Mais $z\overline{z}=|z|^2$
   donc $\boxed{\forall z\in\mathcal{D},\ f(z)\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}\quad\text{ou}\quad|z|=1.}$

6. (a) $f\left(e^{i\theta}\right)=\dfrac{e^{i\theta}}{1+e^{2i\theta}}=\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}+e^{i\theta})}$ et $e^{-i\theta}+e^{i\theta}=2\cos\theta$ d'après une formule d'Euler, donc

   $\boxed{\forall\theta\in]-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\},\ f\left(e^{i\theta}\right)=\dfrac{1}{2\cos\theta}.}$ *Remarque :* les valeurs $\pm\frac{\pi}{2}$ sont exclues car $i,-i\notin\mathcal{D}$.

   (b) Soit $\theta\in]-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$,
   $\sum_{k=0}^{n}(f(z))^k=\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)^k$ est une somme géométrique de raison $\dfrac{1}{2\cos\theta}$.
   Si $\dfrac{1}{2\cos\theta}=1$, alors $\sum_{k=0}^{n}(f(z))^k=n+1$, donc diverge vers $+\infty$.
   Sinon, $\sum_{k=0}^{n}(f(z))^k=\dfrac{1-(\frac{1}{2\cos\theta})^{n+1}}{1-\frac{1}{2\cos\theta}}$ et on sait que $(q^{n+1})_n$ converge si et seulement si $|q|<1$ ou $q=1$.
   On résout : $-1<\dfrac{1}{2\cos\theta}<1$ pour étudier la convergence de cette suite.

$0 < \dfrac{1}{2\cos\theta} < 1 \Leftrightarrow 2\cos\theta > 1 \Leftrightarrow \cos\theta > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right[$

et $-1 < \dfrac{1}{2\cos\theta} < 0 \Leftrightarrow 2\cos\theta < -1 \Leftrightarrow \cos\theta < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left]-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$

Conclusion : $\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} (f(z))^k\right)_n \text{ converge si et seulement si } \theta \in \left]-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right].}$