Devoir Maison n°4

I Exercice 1 : Système à paramètre.

Soit p un réel fixé. Résoudre le système (S_p) : $\begin{cases}(p^2-2)x+y+(2-p)z=2p+1\\ 2x+y+pz=1\\ 2px+y+z=1\end{cases}$

On précisera le rang de ce système en fonction de la valeur de p.

II Exercice 2 : Étude d'une suite.

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases}u_0=1\\ \forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+1}=u_n+1+\dfrac{1}{(n+1)u_n}\end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : "Le réel u_n est bien défini, et $u_n \geqslant n+1$."
2. En déduire la nature de la suite (u_n), et préciser sa limite le cas échéant.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Écrire une fonction `SUITE` prenant pour argument un entier `n` et renvoyant la liste formée par les termes de la suite (u_n) de u_0 jusqu'à u_n.
5. On se propose de déterminer un équivalent de la suite (u_n).
   a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n=u_0+n+\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{(k+1)u_k}$.
   b. Montrer que : $\forall k\in\mathbf{N}^\star,\ \dfrac{1}{(k+1)^2}\leqslant\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.
   c. En déduire que : $\forall n\in\mathbf{N}^\star,\ u_n\leqslant n+3-\dfrac{1}{n}$.
   d. Montrer enfin que : $\forall n\in\mathbf{N},\ n+1\leqslant u_n\leqslant n+3$.
   e. Conclure que : $u_n\sim n$.
6. Dans cette question, on s'intéresse à l'erreur commise en remplaçant u_n par son équivalent n.
   On considère alors la suite (ε_n) définie par : $\forall n\in\mathbf{N},\ \varepsilon_n=u_n-n$.
   a. Écrire une fonction `ERREUR` d'argument l'entier `n` qui renvoie la liste $[\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n]$.
   b. Étudier la monotonie de la suite (ε_n).
   c. En déduire que (ε_n) est convergente et déterminer un encadrement de sa limite ℓ.
   d. Justifier que : $u_n=n+\ell+\mathrm{o}(1)$.