Matrices

I Ensembles de matrices

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. n, p, q et r sont quatre entiers naturels non nuls.

1 Généralités

DÉFINITION

On appelle **matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$** toute famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbf{K}$, indexée par $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. Leur ensemble est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ se note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Les éléments $(a_{i,j})$ sont appelés les *coefficients* de la matrice A.
La notation $A_{i,j}$ désigne, pour un certain couple $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A, à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Cas particuliers :

- Si $n = 1$, on parle de **matrice-ligne** : $L = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \end{pmatrix}$
- Si $p = 1$, on parle de **matrice-colonne** : $C = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$

2 Matrices carrées

DÉFINITION

Si $n = p$, on parle de **matrice carrée**. On note leur ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$.

Cas particuliers :

- Si $n = p$ et : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$, on dit que la matrice est **diagonale**.
- Si $n = p$ et : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$, on dit que la matrice est **triangulaire supérieure**.
- Si $n = p$ et : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$, on dit que la matrice est **triangulaire inférieure**.

L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ se note $\mathrm{Diag}_n(\mathbf{K})$ ou $D_n(\mathbf{K})$.
La matrice identité est diagonale : $I_n = \mathrm{Diag}(1, 1, ..., 1)$.

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures se note $T_n^+(\mathbf{K})$, celui des matrices triangulaires inférieures se note $T_n^-(\mathbf{K})$.

II Opérations sur l'ensemble des matrices

1 Multiplication par un élément de K

Définition

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On définit la matrice λA par :

$$\lambda . A = (\lambda a_{i,j})$$

En d'autres termes, multiplier par un scalaire λ revient à multiplier chaque coefficient de A par λ.

2 Somme de deux matrices

Définition

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On définit la matrice $A + B$ par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$$

En d'autres termes, additionner deux matrices revient à additionner leurs coefficients de même position (même ligne et même colonne).

3 Combinaison linéaire de deux matrices

DÉFINITION

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soient λ et μ dans $\mathbf{K}$.
Alors la matrice $\lambda A + \mu B$ est une **combinaison linéaire** de A et B.

$$\lambda A + \mu B = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})$$

4 Premières propriétés

PROPRIÉTÉ

Le scalaire 1 est l'élément-neutre de la multiplication par un scalaire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad 1.A = A$$

La matrice nulle $0_{n,p}$ est l'élément-neutre de l'addition matricielle :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$$

La multiplication scalaire est associative :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2, \forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),\ \ \lambda(\mu.A)=(\lambda\mu).A=\lambda\mu.A$$

La somme matricielle est associative et commutative :

$$\forall(A,B,C)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^3,\ \ (A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C \quad \text{et} \quad A+B=B+A$$

La multiplication par le scalaire 0 donne la matrice nulle :

$$\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),\ \ 0.A=0_{n,p}$$

5 Produit matriciel

Définition

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.
On appelle produit de A par B la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ définie par $AB = (c_{i,j})$ avec :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

- Il existe des matrices non nulles de produit nul (voir ci-dessus).

  On ne pourra donc pas écrire qu'un produit de matrices est nul si et seulement si l'une des matrices est nulle.

  Il reste néanmoins que :

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),\ \ A \times 0_{p,q} = 0_{n,q} \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}),\ \ 0_{n,p} \times A = 0_{n,q}$.

6 Propriétés du produit matriciel

Propriété

1. **Associativité** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K}),$ $\boxed{A(BC) = (AB)C}$
2. **Distributivité à droite** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K},)$ $\boxed{A(B+C) = AB + AC}$

3. **Distributivité à gauche** : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, $\boxed{(A+B)C = AC + BC}$

4. **Associativité des deux produits** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}), \forall \lambda \in \mathbf{K}$,
$$\boxed{\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)}$$

5. **Elément neutre** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\boxed{I_n A = A I_p = A}$

7 Puissance d'une matrice carrée

DÉFINITION

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée, et soit $p \in \mathbf{N}$.
On définit la matrice A^p par récurrence :

- $A^0 = I_n$;
- $\forall p \in \mathbf{N}, \quad A^{p+1} = A^p \times A$

Proposition

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall p \in \mathbf{N}, \quad (\lambda A)^p = \lambda^p A^p$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB = BA$ (on dit alors que A et B **commutent**).
   Soient $p, q \in \mathbf{N}$. Alors :
   - $A^p \times B^q = B^q \times A^p \qquad$ (*toute puissance de A commute avec toute puissance de B*)
   - $(AB)^p = A^p B^p \qquad$ (*une puissance se distribue sur un produit matriciel*)
   - $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \qquad$ (**Formule du binôme de Newton**)

Attention : Si A et B ne commutent pas, on peut seulement écrire :

- $(AB)^2 = ABAB$
- $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Définition

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Lorsqu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $A^k = 0_n$, on dit que la matrice est **nilpotente**. Le plus petit entier p tel que $A^p = 0_n$ est appelé **indice de nilpotence** de A.

8 Matrices inversibles

DÉFINITION

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
S'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$, alors on dit que A est **inversible**.
La matrice B est alors unique. On l'appelle **inverse de** A et on la note A^{-1}.

Proposition

1. I_n est inversible, et est son propre inverse : $I_n^{-1} = I_n$.
2. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible, et : $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Si A est inversible, alors pour tout entier naturel p, A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.
4. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont inversibles, alors AB est inversible, et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Définition

On note $GL_n(\mathbf{K})$ et on appelle **groupe linéaire d'ordre** n **sur** $\mathbf{K}$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

III Produit matriciel et systèmes d'équations linéaires

1 Matrice associée à un système

On considère le système (S) $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$

$$\text{et sa matrice : } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Alors le système (S) de n équations à p inconnues est équivalent à l'unique équation matricielle : $AX = B$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle **rang de la matrice** A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de tout système linéaire (S) équivalent à $AX = B$ pour une certaine matrice-colonne B.

Cas des matrices carrées : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

$$\boxed{\text{Alors } \mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow A \text{ est inversible}}$$

Dans ce cas, l'unique solution de l'équation matricielle $AX = B$ est donnée par : $\boxed{X = A^{-1}B}$

On retiendra qu'à un système de **Cramer** correspond une matrice **inversible**.

2 Inversion d'une matrice

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est-elle inversible ? Et si oui, quelle est son inverse A^{-1} ?

a Par résolution d'un système

Soit (S) le système associé à $AX = B$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

L'étude du système (S) conduit à deux possibilités :

- ou bien $\mathrm{rg}(S) < n$, et dans ce cas A n'est pas inversible,
- ou bien $\mathrm{rg}(S) = n$, alors (S) est de Cramer et A est inversible. On trouve A^{-1} en résolvant (S).

b En échelonnant une matrice

Si on peut former la matrice I_n par une suite de transformations élémentaires sur les lignes de la matrice A, alors A est inversible et cette même suite de transformations élémentaires appliquées à I_n forme la matrice A^{-1}.

c En trouvant une matrice B telle que AB ou BA est la matrice identité

PROPOSITION *(provisoirement admise)*

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
> S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

En pratique, il suffit de remarquer l'existence d'une relation du type $AB = I_n$ pour pouvoir conclure que $A \in GL_n(\mathbf{K})$ et pour connaître A^{-1}.

d Cas des matrices de taille 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Soit $\det(A) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ le **déterminant** de A.

Alors A est inversible si, et seulement si $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

IV Les matrices diagonales et triangulaires

1 Matrices diagonales

On note ici $D_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Proposition

$D_n(\mathbf{K})$ est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel, *i.e.*

- $\forall A, B \in D_n(\mathbf{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \quad \lambda A + \mu B \in D_n(\mathbf{K})$
- $\forall A, B \in D_n(\mathbf{K}), \quad AB \in D_n(\mathbf{K})$, et
  $\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \times \mathrm{Diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \mathrm{Diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n)$
  En particulier, les matrices diagonales commutent toutes entre elles.

- Soit $p \in \mathbf{N}$. Alors : $(\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n))^p = \mathrm{Diag}(a_1^p, a_2^p, \cdots, a_n^p)$
- $\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ est inversible si, et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_i \neq 0$
  et dans ce cas : $(\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n))^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)$

2 Matrices triangulaires

On note ici $T_n^+(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $T_n^-(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbf{K}) \qquad M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & \vdots \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & a_{nn} \end{pmatrix} \in T_n^-(\mathbf{K})$$

Proposition

$T_n^+(\mathbf{K})$ est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel, *i.e.*

- $\forall A, B \in T_n^+(\mathbf{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \quad \lambda A + \mu B \in T_n^+(\mathbf{K})$

- $\forall A, B \in T_n^+(\mathbf{K}), \quad AB \in T_n^+(\mathbf{K})$.

  Il est possible de préciser la diagonale :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & * & * & * \\ 0 & b_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

- Une matrice triangulaire A est inversible si, et seulement si, ses termes diagonaux sont tous non nuls.

  Dans ce cas, l'inverse A^{-1} est aussi une matrice triangulaire, dont les termes diagonaux sont les inverses des termes diagonaux de A.

Corollaire

$$\forall p \in \mathbf{N}^\star, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & * & * & * \\ 0 & a_{22}^p & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

V Transposition

1 Définition

DÉFINITION

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ ou A^T la matrice ${}^tA = (a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ avec

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], \quad a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

Propriété

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad {}^t({}^tA) = A.$
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \quad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB.$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}) \quad {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA.$
4. $\forall A \in GL_n(\mathbf{K}), \quad {}^tA \in GL_n(\mathbf{K})$ et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$
5. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$

2 Matrices carrées symétriques ou antisymétriques

DÉFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. On dit que A est **symétrique** lorsque ${}^tA = A$, *i.e.* $\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,j} = a_{j,i}$
   L'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$.
2. On dit que A est **antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A$, *i.e.* $\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,j} = -a_{j,i}$
   L'ensemble des matrices antisymétriques à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.

Proposition

Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ sont stables par combinaison linéaire.