Suites récurrentes usuelles

I Suites arithmétiques

1 Définition

Définition

Soit $r \in \mathbf{K}$. On appelle **suite arithmétique de raison** r toute suite (u) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$

2 Terme général

Soit (u) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{K}$.

Propriété

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

$$\forall n, p \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_p + (n-p)r$$

3 Somme de termes consécutifs

Soit (u) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{K}$.

Propriété

$\forall n, p \in \mathbf{N}$,,Pour $n \geqslant p$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_n + u_p)(n - p + 1)}{2}$

On peut retenir la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique par la formule :

$\boxed{\text{” Le nombre de termes de la somme, multiplié par la moyenne des termes extrêmes.”}}$

4 Monotonie et comportement asymptotique

Une suite arithmétique de raison r est croissante si $r \geqslant 0$, décroissante si $r \leqslant 0$.

Proposition **Nature d'une suite arithmétique**

Soit (u) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.

- Si $r > 0$, alors (u) diverge vers $+\infty$.
- Si $r = 0$, alors (u) converge vers u_0.
- Si $r < 0$, alors (u) diverge vers $-\infty$.

II Suites géométriques

1 Définition

Définition

Soit $q \in \mathbf{K}$. On appelle **suite géométrique de raison** q toute suite (u) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$

2 Terme général

Soit (u) une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{K}^{\star}$.

Propriété

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

$$\forall n, p \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

3 Somme de termes consécutifs

Propriété Si $n \geqslant p$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_0\, q^p\, \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \qquad \text{si } q \neq 1,$$
$$= (n-p+1)u_0 \qquad \text{si } q = 1.$$

4 Monotonie et comportement asymptotique

Proposition **Monotonie de la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $q \in \mathbf{R}$**

- Si $q > 1$, alors (q^n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors (q^n) est constante.
- Si $0 < q < 1$, alors (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 0$, alors (q^n) est stationnaire à partir du rang 1 (car $0^0 = 1$ par convention).
- Si $q < 0$, alors (q^n) n'est pas monotone.

PROPOSITION **Nature de la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $q \in \mathbf{R}$**

- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $|q| > 1$, alors la suite (q^n) diverge. En particulier, si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $q = -1$, alors la suite (q^n) diverge.

III Suites arithmético-géométrique

1 Définition

Définition

Soient $a, b \in \mathbf{K}$. On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite (u) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = a \times u_n + b$

2 Suite auxiliaire

Soit (u) une suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, où $a, b \in \mathbf{K}$.
On suppose dans ce qui suit que $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$ (sinon, voir les paragraphes précédents).
Soit $\ell \in \mathbf{K}$ tel que $\ell = a\ell + b$.

PROPRIÉTÉ

La suite (v) définie par, $\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = u_n - \ell \quad$, est géométrique de raison a.

3 Terme général

PROPRIÉTÉ

En conséquence, $\forall n, p \in \mathbf{N}, \quad u_n = (u_p - \ell)a^{n-p} + \ell.$

4 Monotonie et comportement asymptotique

IV Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

1 Définition

Dans ce paragraphe, $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\star}$ et la suite (u) vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

2 Équation caractéristique

L'équation $(E) : r^2 = ar + b$ est appelée *équation caractéristique* de la relation de récurrence linéaire.
Il est possible de déterminer l'expression de u_n en fonction de n en résolvant cette équation.
Soit Δ son discriminant. On examine les différents cas possibles.

3 Résolution de la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions réelles r_1 et r_2.
Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution-double réelle r_0.
Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.

Théorème

Il existe deux constantes réelles A et B telles que, $\forall n \in \mathbf{N}$:

- si $\Delta > 0$, $u_n = A \times r_1^n + B \times r_2^n$
- si $\Delta = 0$, $u_n = (An + B) \times r_0^n$
- si $\Delta < 0$, $u_n = r^n \left(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)\right)$

Remarque : On peut déterminer les valeurs des constantes A et B dès qu'on connaît les termes initiaux u_0 et u_1 de la suite (u).