Suites réelles

I Généralités

1 Un peu de vocabulaire

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que :

* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **positive** (*respectivement :* négative) si :
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant 0 \quad (\textit{respectivement}: u_n \leqslant 0).$$
* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **constante** si : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0,$ ou encore : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n$.
* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **périodique de période** $p \in \mathbf{N}^\star$ si : $\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+p} = u_n$.

2 Suites majorées, minorées, bornées

DÉFINITION

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que :

- $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **majorée** si : $\exists\, M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant M.$
  On dit que M est un **majorant** de la suite (u_n).
- $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **minorée** si : $\exists\, m \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant m.$
  On dit que m est un **minorant** de la suite (u_n).
- $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire si :
  $$\exists\, m, M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M.$$
  ou encore si : $\exists\, K \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leqslant K.$

3 Monotonie

DÉFINITION

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que :

* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **croissante** si : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,
* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **décroissante** si : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$,
* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante,
* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **strictement croissante** si : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} > u_n$,
* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **strictement décroissante** si : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} < u_n$,
* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n > 0$. Alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est croissante} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$$

Proposition **Monotonie de la suite géométrique $(q^n)_{n \in \mathbf{N}}$, $q \in \mathbf{R}$**

- Si $q > 1$, alors (q^n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors (q^n) est constante.
- Si $0 < q < 1$, alors (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 0$, alors (q^n) est stationnaire à partir du rang 1 (car $0^0 = 1$ par convention).
- Si $q < 0$, alors (q^n) n'est pas monotone.

4 Suites extraites

DÉFINITION

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On définit :

* $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des termes d'indices pairs,
* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des termes d'indices impairs.

II Convergence

1 Définitions

Définition

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge** vers le **réel** ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Définition

- On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **tend** vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si :
$$\forall\, A \in \mathbf{R}, \quad \exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant A$$
- On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **tend** vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si :
$$\forall\, A \in \mathbf{R}, \quad \exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant A$$

Définition

Une suite réelle est dite **convergente** si elle converge vers un réel ℓ, sinon elle est dite **divergente**.
Déterminer la **nature** d'une suite réelle c'est dire si elle est convergente ou divergente.

Proposition — Nature d'une suite arithmétique

Soit (u) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.

- Si $r > 0$, alors (u) diverge vers $+\infty$.
- Si $r = 0$, alors (u) converge vers u_0.
- Si $r < 0$, alors (u) diverge vers $-\infty$.

PROPOSITION **Nature de la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $q \in \mathbf{R}$**

- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $|q| > 1$, alors la suite (q^n) diverge. En particulier, si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $q = -1$, alors la suite (q^n) diverge.

2 Théorèmes de convergence

THÉORÈME

> Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite réelle convergente, alors sa limite est unique.

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$$

Théorème

Toute suite réelle convergente est bornée.

3 Opérations sur les limites

PROPOSITION **Convergence de la somme de deux suites**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles, ℓ et ℓ' deux réels.
Le tableau suivant résume la convergence de la somme de ces deux suites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

PROPOSITION Convergence du produit de deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles, ℓ et ℓ' deux réels.
Le tableau suivant résume la convergence du produit de ces deux suites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Proposition **Convergence de l'inverse d'une suite**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $u_n \neq 0$ et soit ℓ un réel.
Le tableau suivant résume la convergence de l'inverse de cette suite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	FI	$+\infty$	$-\infty$	0	0

III Limites et inégalités

1 Signe d'une suite de limite non nulle

Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle qui converge vers un réel $\ell > 0$.

Alors, il existe un rang n_0 à partir duquel les termes de la suite sont strictement positifs :

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n > 0$$

2 Passage à la limite dans une inégalité

THÉORÈME

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles convergentes telles que :

$$(\exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant v_n) \quad \text{ou} \quad (\exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n < v_n)$$

Alors, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

3 Théorème des « gendarmes »

THÉORÈME **Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites réelles telles que :

1. les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbf{R}$,
2. $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$

Alors, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, et sa limite est ℓ.

Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
2. la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Alors, la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

THÉORÈME **Théorème de comparaison**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant v_n.$$

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$.

IV Suites monotones

1 Propriétés de l'ensemble $\mathbf{R}$

DÉFINITION

Soit A une partie de $\mathbf{R}$ et soit $x \in \mathbf{R}$. On dit que :

- x est **un majorant** de A si : $\forall\, a \in A,\ a \leqslant x$,
- x est **un minorant** de A si : $\forall\, a \in A,\ a \geqslant x$.

DÉFINITION

Soit A une partie de $\mathbf{R}$ et soit $\underline{x \in \mathbf{A}}$.

- Si x est un majorant de A, on dit que x est **le plus grand élément** de A et on le note $\max(A)$.
- Si x est un minorant de A, on dit que x est **le plus petit élément** de A et on le note $\min(A)$.

Définition

- Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, on l'appelle la **borne supérieure** de A et on le note $\sup A$.
- Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, on l'appelle la **borne inférieure** de A et on le note $\inf A$.

PROPOSITION **Propriété de la borne supérieure dans $\mathbf{R}$**

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbf{R}$.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbf{R}$.

Ces résultats sont admis, ils résultent de la construction de $\mathbf{R}$.
Ils sont faux dans l'ensemble des rationnels $\mathbf{Q}$.

2 Théorème de convergence des suites monotones

THÉORÈME **Théorème de la limite monotone**

- Toute suite réelle (u_n) croissante et majorée converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
- Toute suite réelle (u_n) croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite réelle (u_n) décroissante et minorée converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
- Toute suite réelle (u_n) décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Corollaire

Toute suite réelle monotone admet une limite finie ou infinie.

3 Suites adjacentes

DÉFINITION

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont dites **adjacentes** si :

1. (u_n) est croissante,
2. (v_n) est décroissante,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

THÉORÈME **Théorème des suites adjacentes**

Si (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes, alors elles convergent et ont même limite $\ell \in \mathbf{R}$.
De plus, on a : $\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$

V Comparaison des suites réelles

Dans tout ce qui suit, le terme général des suites considérées ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

1 Négligeabilité

Définition

Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles. On dit que la suite (u_n) est **négligeable** devant (v_n), et on note $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, si :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Remarques :

- Soit $a \in \mathbf{R}^\star$. $u_n = \mathrm{o}(a)$ signifie que (u_n) tend vers 0.
  En particulier : $u_n = \mathrm{o}(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- $u_n = \mathrm{o}(0)$ signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.
  Nous n'envisageons pas ce cas de figure ici !

Proposition

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) des suites réelles dont le terme général ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Soient $\lambda \in \mathbf{R}^\star$ et $\alpha > 0$. Alors on a :

- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{o}(\lambda v_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n\, w_n = \mathrm{o}(v_n\, w_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $w_n = \mathrm{o}(x_n)$, alors $u_n\, w_n = \mathrm{o}(v_n\, x_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n^\alpha = \mathrm{o}(v_n^\alpha)$, dès lors que ces quantités sont bien définies.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors $\dfrac{1}{v_n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n + v_n = \mathrm{o}(w_n)$.

Proposition **Croissances comparées de suites usuelles**

On note ici $<<$ le fait d'être « négligeable devant ».
Soient $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$ trois réels. Alors on a : $(\ln n)^{\beta} << n^{\alpha} << a^{n} << n! << n^{n}$

2 Suites équivalentes

DÉFINITION

Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles.

On dit que la suite (u_n) est **équivalente** à la suite (v_n), et on note $u_n \sim v_n$, si : $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Proposition

Soient (u_n) est (v_n) deux suites réelles. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n + v_n \sim v_n$.

Propriété

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) des suites réelles, et $\alpha \in \mathbf{R}$.
Alors on a (lorsque les quantités suivantes sont bien définies) :

- $u_n \sim v_n \iff v_n \sim u_n$
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\alpha u_n \sim \alpha v_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n w_n \sim v_n x_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.

Proposition — Nature de suites équivalentes

Deux suites réelles équivalentes sont de même nature.

En particulier : si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbf{R}$ (*resp.* $+\infty, -\infty$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ (*resp.* $+\infty, -\infty$)

Proposition **Équivalents usuels pour les suites de limite nulle**

Soit (u_n) une suite réelle convergent vers 0. Alors on a :

- $\sin u_n \sim u_n$
- $\tan u_n \sim u_n$
- $\cos u_n - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \quad (\alpha \in \mathbf{R})$

Proposition **Équivalent pour une suite polynomiale**

Une suite polynomiale est équivalente à son monôme dominant :
si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ avec $a_p \neq 0$, alors $P(n) \sim a_p n^p$