

Exercice 1. Déterminer la somme de tous les multiples de 3 compris entre 5 et 107.

La somme demandée s'écrit : $S = \sum_{5 \leq 3k \leq 107} (3k)$.

Or, $5 \leq 3k \leq 107 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq k \leq \frac{107}{3}$ et puisque k doit être entier : $2 \leq k \leq 35$.

Ainsi, $S = \sum_{k=2}^{35} (3k) = 3 \left(\sum_{k=1}^{35} k - \sum_{k=1}^1 k \right) = 3 \left(\frac{35 \times 36}{2} - 1 \right)$ donc $S = 1887$.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .

2. Calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_7$.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $v_n = u_{2n}$.

Déterminer la nature de la suite (v_n) . En déduire la valeur de la somme $u_2 + u_4 + \dots + u_{14}$.

$\forall n \geq 1, u_n = 2 \times 3^{n-1}$ donc $S = \sum_{n=1}^7 2 \cdot 3^{n-1} = 2 \sum_{n=0}^6 3^n = 2 \times \frac{1-3^7}{1-3}$. $S = 3^7 - 1 = 2186$.

$\forall n \geq 1, v_n = u_{2n} = 2 \times 3^{2n-1} = \frac{2}{3} \times 9^n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 9.

$T = \sum_{n=1}^7 v_n = v_1 \times \frac{1-9^7}{1-9} = 6 \times \frac{9^7-1}{8}$ soit : $T = \frac{3}{4}(9^7-1)$.

Exercice 3. Donner la formule explicite des suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies de la manière suivante :

1. $u_2 = 3, \quad \forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = u_n - 1.$

3. $u_1 = 2, \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n.$

2. $u_0 = 2, \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n.$

4. $u_0 = 1, \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = -u_n + 5.$

1) $\forall n \geq 2, u_n = 5 - n$

3) $\forall n \geq 1, u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

2) $\forall n \geq 0, u_n = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$

4) $\forall n \geq 0, u_n = -\frac{3}{2}(-1)^n + \frac{5}{2}.$

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{5}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{3}.$$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n .

2. Calculer la somme des n premiers termes de (u_n) en fonction de n .

1) (u_n) est une suite arithmético-géométrique. On pose $\ell = -\frac{1}{4}\ell + \frac{1}{3}$. On trouve alors $\ell = \frac{4}{15}$.

On pose ensuite $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = u_n - \ell$. La suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

On a donc : $\forall n \geq 0, v_n = v_0 \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, avec $v_0 = u_0 - \ell = -\frac{1}{15}$. Enfin, $u_n = v_n + \ell$, donc :

$$\forall n \geq 0, u_n = -\frac{1}{15} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{4}{15}.$$

2) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n) .

On a alors : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{15} \left(-\frac{1}{4}\right)^k + \frac{4}{15} \right)$ et par linéarité : $S_n = -\frac{1}{15} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{15}$

donc $S_n = -\frac{1}{15} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} + \frac{4n}{15}$. Finalement : $\forall n \geq 0, S_n = -\frac{4}{75} \left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right) + \frac{4n}{15}$.

Exercice 5. Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$.

1. Montrer que pour tout entier n , v_n existe et $v_n > 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{v_n}$ est arithmétique.

3. En déduire une expression de v_n en fonction de n .

1) On remarque que le seul problème d'existence serait qu'il existe un entier n tel que $v_n = -1$, ce qui interdirait de définir v_{n+1} . Il suffit donc de montrer que $v_n > 0$ pour prouver l'existence de la suite (v_n) .

Par récurrence : • On pose pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}_n : \ll v_n > 0 \gg$.

• Initialisation au rang $n = 0$. $v_0 = 1 > 0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Hérédité à partir du rang $n = 0$. Soit $n \geq 0$, on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.

Alors $v_n > 0$ et par règle des signes, $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n} > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

• On conclut d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \geq 0, v_n > 0.}$

2) Soit $n \geq 0$. On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$. $\boxed{(u_n) \text{ est arithmétique de raison } 1.}$

3) Ainsi, $u_n = u_0 + n \times 1 = 1 + n$ et $v_n = \frac{1}{u_n}$ donc $\boxed{\forall n \geq 0, v_n = \frac{1}{n+1}.}$

Exercice 6. Soit $a > 0$. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$u_1 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = au_n^2 \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n).$$

1. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et qu'elle est arithmético-géométrique.

2. Déterminer l'expression de (u_n) en fonction de n , de a et de u_1 .

1) On montre par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi la suite (v_n) est bien définie.

Soit $n \geq 1$. On a : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(au_n^2) = \ln(a) + 2\ln(u_n)$.

Ainsi : $\forall n \geq 1, v_{n+1} = 2v_n + \ln(a)$. $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est arithmético-géométrique.}}$

2) Point-fixe : $\ell = 2\ell + \ln(a)$, donc $\ell = -\ln(a)$.

On pose $w_n = v_n - \ell = v_n + \ln(a)$. La suite (w_n) est géométrique de raison 2.

Donc $\forall n \geq 1, w_n = w_1 \times 2^{n-1} = (v_1 + \ln(a))2^{n-1} = (\ln(u_1) + \ln(a))2^{n-1} = \ln(au_1)2^{n-1}$.

Par suite, $v_n = w_n - \ln(a) = \ln(au_1)2^{n-1} - \ln(a)$. Enfin, $u_n = \exp(v_n)$, donc

$$u_n = \exp(\ln(au_1)2^{n-1} - \ln(a)) = \frac{\exp(\ln(au_1)2^{n-1})}{\exp(\ln(a))}, \text{ soit : } \boxed{\forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{a}(au_1)^{2^{n-1}}.}$$

Exercice 7. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{4+x}{1+x}$, et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions ℓ_1 et ℓ_2 telles que $\ell_1 < \ell_2$.

2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et strictement positive.

3. On pose $v_n = \frac{u_n - \ell_2}{u_n - \ell_1}$. Montrer que (v_n) est géométrique.

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

1) On résout l'équation $(E) : f(x) = x$, définie pour $x \neq -1$. $(E) \Leftrightarrow \frac{4+x}{1+x} = x \Leftrightarrow \frac{4+x}{1+x} - \frac{x(1+x)}{1+x} = 0$
 $(E) \Leftrightarrow 4+x-x(1+x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+4=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-2$. On pose donc $\boxed{\ell_1 = -2 \text{ et } \ell_2 = 2.}$

2) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}_n : \ll u_n > 0 \gg$. Comme à l'exercice 5, cela implique que (u_n) est bien définie.

• Initialisation au rang $n = 0$: $u_0 = 3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Hérédité à partir du rang $n = 0$: soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

Alors $4+u_n > 0$ et $1+u_n > 0$ donc par quotient : $u_{n+1} > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$: $\boxed{\forall n \geq 0, u_n > 0.}$

3) On pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$. Alors v_n est bien définie car $u_n + 2 \neq 0$. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{4+u_n}{1+u_n} - 2}{\frac{4+u_n}{1+u_n} + 2} = \frac{4 + u_n - 2(1 + u_n)}{4 + u_n + 2(1 + u_n)} = \frac{-u_n + 2}{3u_n + 6} = -\frac{1}{3} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2} = -\frac{1}{3}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

4) Ainsi, $\forall n \geq 0, v_n = v_0 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ avec $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \frac{1}{5}$.

On exprime alors u_n en fonction de v_n : $v_n(u_n + 2) = u_n - 2$ donc $u_n(v_n - 1) = -2 - 2v_n$

et il vient : $u_n = 2 \times \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$. Ainsi : $\forall n \geq 0, u_n = 2 \times \frac{1 + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

On peut légèrement simplifier : $\forall n \geq 0, u_n = 2 \times \frac{5 \times 3^n + (-1)^n}{5 \times 3^n - (-1)^n}$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = -u_n + n + 1.$$

1. Déterminer une suite arithmétique (a_n) vérifiant la relation $(\mathcal{R})$.
2. Montrer qu'une suite (u_n) vérifie $(\mathcal{R})$ si, et seulement si, la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - a_n$ est géométrique de raison -1 .
3. En déduire toutes les suites de $\mathcal{E}$.

1) Une suite (a_n) arithmétique est d'expression : $\forall n \geq 0, a_n = a_0 + nr$. Pour qu'elle vérifie la relation $(\mathcal{R})$,

il faut et il suffit que : $\forall n \in \mathbf{N}, a_0 + (n+1)r = -(a_0 + nr) + n + 1$.

Soit : $\forall n \in \mathbf{N}, (2r - 1)n + 2a_0 + r - 1 = 0$.

Ainsi pour $n = 0$, on obtient : $2a_0 + r - 1 = 0$, et pour $n = 1$, on a : $2a_0 + 3r - 2 = 0$.

On résout le système $\begin{cases} 2a_0 + r - 1 = 0 \\ 2a_0 + 3r - 2 = 0 \end{cases}$ et on trouve $r = \frac{1}{2}$ et $a_0 = \frac{1}{4}$.

On pose donc $a_n = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}$ et on vérifie que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie la relation (R) .

2) (u_n) vérifie $(R) \Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_{n+1} = -u_n + n + 1 \Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_{n+1} - a_{n+1} = (-u_n + n + 1) - (-a_n + n + 1) \Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_{n+1} - a_{n+1} = -(u_n - a_n) \Leftrightarrow \forall n \geq 0, v_{n+1} = -v_n$ en posant $v_n = u_n - a_n$.

Ainsi, (u_n) vérifie (R) si et seulement si $(u_n - a_n)$ est géométrique de raison -1 .

3) On obtient donc l'ensemble des suites de $(\mathcal{E})$ en ajoutant à la suite (a_n)

une suite géométrique de raison -1 quelconque : $(\mathcal{E}) = \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2} + \alpha(-1)^n \right)_{n \geq 0} \right\}, \alpha \in \mathbf{R}$.

Exercice 9. Donner la forme générale des suites (u_n) qui vérifient :

1. $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$.
3. $\forall n \in \mathbf{N}, 4u_{n+2} = u_n$.

Déterminer dans tous les cas l'unique suite vérifiant de plus $u_0 = u_1 = 1$.

1) L'équation caractéristique associée est : $r^2 = 4(r - 1)$ équivalente à : $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r - 2)^2 = 0$

Ainsi, $\exists A, B \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = (An + B)2^n$.

On trouve les constantes A, B grâce aux termes initiaux : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ 2(A + B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \left(-\frac{n}{2} + 1\right)2^n$.

2) L'équation caractéristique associée est : $r^2 = 2(r - 1)$ équivalente à : $r^2 - 2r + 2 = 0$
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$.

On a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 1 - i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + i$.

On cherche une forme exponentielle (facile ici) : $z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $\boxed{\exists A, B \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = (\sqrt{2})^n \left(A \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right)}$.

On trouve les constantes A, B grâce aux termes initiaux :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{\sqrt{2}}{2}B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{Conclusion : } \boxed{\forall n \in \mathbf{N}, u_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}.$$

3) L'équation caractéristique associée est : $4r^2 = 1$ de solutions réelles $\pm \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\exists A, B \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = A \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

On trouve les constantes A, B grâce aux termes initiaux : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

Exercice 10. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1}(u_n)^2.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n > 0$.
2. Soit alors (v_n) la suite définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout entier n .
 - a. Quelle relation de récurrence la suite (v_n) vérifie-t-elle ?
 - b. En déduire une expression de v_n puis une expression de u_n en fonction de n .

1) Par récurrence double immédiate.

2a) $v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln(u_{n+1}(u_n)^2) = \ln(u_{n+1}) + 2\ln(u_n)$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n}$.

2b) L'équation caractéristique associée est : $r^2 = r + 2 \Leftrightarrow r^2 - r - 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 9 > 0$ et de solutions réelles -1 et 2 . Ainsi, $\exists A, B \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, v_n = A(-1)^n + B 2^n$.

On trouve les constantes A, B grâce aux termes initiaux :

$$\begin{cases} v_0 = \ln(1) = 0 \\ v_1 = \ln(e) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$.

Enfin, en écrivant $u_n = e^{v_n}$, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \exp\left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right)}$.