Corrigé du Devoir Maison n°4

Exercice 1 : Système linéaire.

Soit p un paramètre réel. Sous forme matricielle : $(S_p) = \left(\begin{array}{ccc|c} p^2-2 & 1 & 2-p & 2p+1 \\ 2 & 1 & p & 1 \\ 2p & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

On repère un pivot égal à 1 en première ligne et deuxième colonne : on échange les deux premières colonnes :

$$(S_p) \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & p^2-2 & 2-p & 2p+1 \\ 1 & 2 & p & 1 \\ 1 & 2p & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & p^2-2 & 2-p & 2p+1 \\ 0 & 4-p^2 & 2p-2 & -2p \\ 0 & -p^2+2p+2 & p-1 & -2p \end{array}\right)$$

On repère ensuite deux coefficients proportionnels troisième colonne, lignes 2 et 3 : on échange C_2 et C_3, puis L_2 et L_3 :

$$(S_p) \underset{\substack{C_2 \leftrightarrow C_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2-p & p^2-2 & 2p+1 \\ 0 & p-1 & -p^2+2p+2 & -2p \\ 0 & 2p-2 & 4-p^2 & -2p \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2-p & p^2-2 & 2p+1 \\ 0 & p-1 & -p^2+2p+2 & -2p \\ 0 & 0 & p^2-4p & 2p \end{array}\right)$$

Il faut maintenant distinguer plusieurs cas :

$*$ $\underline{p-1=0 \quad (p=1)}$

On a : $(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(S_1) est de rang 2, compatible, avec une variable libre.

On résout par remontée : $L_2 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ (attention aux échanges de colonnes...)

puis $L_1 \Leftrightarrow y + z - x = 3 \Leftrightarrow y = -z + \dfrac{7}{3}$. $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{(-\frac{2}{3}, -z + \frac{7}{3}, z),\ z \in \mathbf{R}\right\}.}$

$*$ $\underline{p^2-4p=0 \quad (p=0 \text{ ou } p=4)}$

1^er^ sous-cas : $p=0$. On a : $(S_0) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(S_0) est de rang 2, compatible, avec une variable libre.

On résout par remontée : $L_2 \Leftrightarrow -z + 2x = 0 \Leftrightarrow z = 2x$ (attention aux échanges de colonnes...)

puis $L_1 \Leftrightarrow y + 2z - 2x = 1 \Leftrightarrow y = -2x + 1$. $\boxed{\mathcal{S}_0 = \{(x, -2x+1, 2x),\ x \in \mathbf{R}\}.}$

2^ème^ sous-cas : $p=4$. On a : $(S_4) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 14 & 9 \\ 0 & \boxed{3} & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$

(S_4) est de rang 2, mais incompatible : $\boxed{\mathcal{S}_4 = \varnothing.}$

$*$ $\underline{p-1 \neq 0 \text{ et } p^2-4p \neq 0}$. C'est le cas général : $\forall p \in \mathbf{R} \setminus \{0,1,4\}$, $(S_p) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2-p & p^2-2 & 2p+1 \\ 0 & \boxed{p-1} & -p^2+2p+2 & -2p \\ 0 & 0 & \boxed{p^2-4p} & 2p \end{array}\right)$

Alors (S_p) est de rang 3, donc de Cramer. Il possède une unique solution.

$L_3 \Leftrightarrow (p^2-4p)x = 2p \Leftrightarrow x = \dfrac{2p}{p^2-4p} = \dfrac{2}{p-4}$

$L_2 \Leftrightarrow (p-1)z + (-p^2+2p+2)x = -2p \Leftrightarrow (p-1)z = \dfrac{4(p-1)}{p-4} \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{p-4}$

$L_1 \Leftrightarrow y + (2-p)z + (p^2-2)x = 2p+1 \Leftrightarrow y = \dfrac{-3p-8}{p-4}$

Conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbf{R} \setminus \{0,1,4\},\ \mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{2}{p-4}, -\dfrac{3p+8}{p-4}, \dfrac{4}{p-4}\right)\right\}.}$

Exercice 2 : Étude d'une suite.

On considère la suite réelle (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + 1 + \dfrac{1}{(n+1)u_n} \end{cases}$

1. $\underline{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \text{ existe, et } u_n \geqslant n+1}$

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le prédicat : "Le réel u_n est bien défini, et $u_n \geqslant n+1$."

• $\mathcal{P}_0$ est vrai puisque $u_0 = 1$.
• Soit $n \in \mathbf{N}$, et supposons $\mathcal{P}_n$ vrai. Alors $u_n \geqslant n+1 > 0$ donc $u_n \neq 0$ et u_{n+1} est bien défini.
De plus, $u_{n+1} \geqslant u_n + 1 \geqslant n+2$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai.
• $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang $n=0$ et héréditaire à partir du rang $n=0$.
D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vrai pour tout $n \geqslant 0$.
$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \text{ est bien défini et } u_n \geqslant n+1}$.

2. Comportement asymptotique de la suite (u_n)
Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $v_n = n+1$. Alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant v_n$.
Par comparaison à une suite divergente vers $+\infty$: $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

3. Monotonie de la suite (u_n)
Soit $n \in \mathbf{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{(n+1)u_n} \geqslant 1 > 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

4. Traitement informatique
```
def SUITE(n) :
    u, L = 1, [1]                 # Initialisations.
    for k in range(n) :           # Si n = 0, la boucle n'est pas effectuée.
        u = u + 1 + 1 / ((k+1)*u) # Calcul du terme suivant.
        L.append(u)               # On complète la liste.
    return L
```

5. Équivalent de la suite (u_n)
a. Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on note $\mathcal{Q}_n$ le prédicat : $\mathcal{Q}_n : u_n = u_0 + n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k}$.
• $u_1 = u_0 + 1 + \dfrac{1}{u_0}$ donc $\mathcal{Q}_1$ est vrai.
• Soit $n \geqslant 1$ et supposons $\mathcal{Q}_n$ vrai.
Alors : $u_{n+1} = u_n + 1 + \dfrac{1}{(n+1)u_n} = u_0 + n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k} + 1 + \frac{1}{(n+1)u_n}$
$u_{n+1} = u_0 + (n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)u_k}$ donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vrai.
• $\mathcal{Q}_n$ est initialisé au rang $n=1$ et héréditaire à partir du rang $n=1$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{Q}_n$ est vrai : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = u_0 + n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k}}$ **(1)**
b. $\forall k > 0,\ \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)} \geqslant \dfrac{1}{(k+1)^2}$.
c. On sait que : $\forall k \geqslant 0,\ u_k \geqslant k+1$ donc en remplaçant dans la relation **(1)** dès que $k \geqslant 1$:
$\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_0 + n + \dfrac{1}{u_0} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant n + 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$: on reconnaît une somme téléscopique.
$u_n \leqslant n + 2 + 1 - \dfrac{1}{n}$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant n + 3 - \dfrac{1}{n}}$.
d. $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ n+1 \leqslant u_n \leqslant n+3.}$ Vrai pour $n=0$, et aussi pour tout $n \geqslant 1$ d'après **1)** et **5c)**.
e. $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{n+1}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+3}{n}$, donc $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{3}{n}$. Or, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)$ convergent vers 1.
Donc d'après le théorème d'encadrement : $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ converge vers 1, soit : $\boxed{u_n \sim n}$.

6. Analyse de la qualité de l'équivalent
a. Méthode informatique
```
def ERREUR(n) :
    ER, L = [], SUITE(n)          # Initialisations.
    for k in range(n+1) :         # La liste L est de longueur n + 1.
```

```
            ER.append(L[k]-k)
        return ER
```

b. Monotonie de la suite (ε_n) Soit $n \in \mathbf{N}$.

Alors : $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = (u_{n+1} - n - 1) - (u_n - n) = u_{n+1} - u_n - 1 = 1 + \dfrac{1}{(n+1)u_n} - 1 = \dfrac{1}{(n+1)u_n} > 0$.

$\boxed{\text{La suite } (\varepsilon_n) \text{ est strictement croissante}}$.

c. Convergence de la suite (ε_n)

D'après **5d)**, $\forall n \in \mathbf{N},\ n+1 \leqslant u_n \leqslant n+3$ donc : $\forall n \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 3$.

La suite (ε_n) est croissante et majorée, donc $\boxed{(\varepsilon_n) \text{ converge vers un réel } \ell}$.

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient : $\boxed{1 \leqslant \ell \leqslant 3}$.

d. Un développement limité de u_n

$\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n - \ell) = 0$. Ainsi, $\varepsilon_n - \ell = \mathrm{o}(1)$, ou encore : $u_n - n - \ell = \mathrm{o}(1)$.

Par opérations sur la relation de négligeabilité : $\boxed{u_n = n + \ell + \mathrm{o}(1)}$.