Probabilités

I Expérience aléatoire et univers

1 L’univers

Définition

Une **expérience aléatoire** est une expérience qu'on peut réaliser une infinité de fois dans les mêmes conditions, et dont le résultat n'est pas connu à l'avance : le hasard intervient.

Définition

L'ensemble des **issues** ou **résultats possibles** d'une expérience aléatoire est appelé **univers** et généralement noté Ω.

Remarques :

- Même si on ne connaît pas à l'avance l'issue d'une expérience aléatoire, on suppose qu'on connaît l'ensemble des issues possibles.

- Il peut exister plusieurs modélisations associées à une même expérience aléatoire, et à chacune, on associera un univers différent. Pour le lancer du dé, on pourrait s'intéresser à la parité du résultat, ou au fait d'obtenir un 6 ou non. L'univers serait alors non plus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mais $\{pair, impair\}$ ou $\{6, \text{non } 6\}$. Il faut donc toujours commencer par préciser l'univers avec lequel on travaille.

2 Événements

DÉFINITION

Soit Ω un univers fini.
On appelle **événement** tout ensemble d'issues, c'est-à-dire toute partie de l'univers.
Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue, c'est-à-dire un singleton.

Définition

On appelle **événement impossible** l'ensemble vide et **événement certain** l'univers entier.
Soient A et B deux événements.
On appelle **événement contraire** à A, généralement noté $\overline{A}$, le complémentaire de A dans Ω.
On appelle :

- « A et B » l'événement $A \cap B$, réalisé lorsque A et B sont réalisés.
- « A ou B » l'événement $A \cup B$, réalisé lorsque A ou B ou les deux sont réalisés.

Lorsque « A et B » est l'événement impossible (*i.e.* $A \cap B = \varnothing$) les événements A et B sont dits **incompatibles**.

3 Système complet d'événements

DÉFINITION

Soit Ω un univers. On appelle **système complet d'événements** la donnée de n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (avec $n \in \mathbf{N}^\star$) tels que :

- $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad A_i \neq \varnothing$ — non vides
- $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ — deux à deux disjoints
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ — de réunion l'univers.

Remarques :

- Parfois la première condition est omise dans la définition.
  On précise alors système complet d'événements non vides.
- Utiliser un système complet d'événements revient à raisonner par disjonction des cas. On découpe l'univers en plusieurs événements, un et un seul d'entre eux étant réalisé à chaque issue.

4 Résumé du vocabulaire

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités
l'ensemble	l'univers
un élément	une issue
un singleton	un événement élémentaire
une partie	un événement
l'ensemble vide	l'événement impossible
le complémentaire	l'événement contraire
$A \cap B$	« A et B »
$A \cup B$	« A ou B »
A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles
partition	système complet d'événements

II Probabilité

1 Espace probabilisé

Définition

On considère un univers fini Ω.
On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant :

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- pour tous événements incompatibles A et B, on a $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

On appelle **espace probabilisé** tout couple $(\Omega, \mathbf{P})$ où Ω est un univers et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω.

2 Propriétés des probabilités

PROPRIÉTÉ

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur un univers Ω fini. Soient A et B deux événements.

- $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$ PROBABILITÉ DE L'ÉVÉNEMENT CONTRAIRE
- $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$ PROBABILITÉ DE L'ÉVÉNEMENT IMPOSSIBLE
- $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \overline{B})$ FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

- Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.
- Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ CROISSANCE DE LA PROBABILITÉ
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ PROBABILITÉ DE LA RÉUNION

Proposition

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur un univers Ω fini.
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (avec $n \in \mathbf{N}^\star$) sont des événements deux à deux disjoints, alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Corollaire

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur un univers Ω fini.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (avec $n \in \mathbf{N}^\star$) est un système complet d'événements, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

3 Construction d'une probabilité

On considère un univers fini Ω de cardinal n.
Une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$. Or $\mathcal{P}(\Omega)$ possède 2^n éléments.
On ne cherchera pas à définir la valeur de la probabilité de chacun des 2^n événements.

Il suffira de donner les probabilités des n événements élémentaires.
En effet, chaque événement étant réunion disjointe d'événements élémentaires, sa probabilité sera connue.

Théorème

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. On considère $p_1, p_2, \cdots, p_n$ des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Alors il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

4 Probabilité uniforme

Définition

Soit Ω un univers fini.
On appelle **probabilité uniforme**, ou **équiprobabilité** sur Ω l'unique probabilité attribuant la même probabilité à tous les événements élémentaires.

Remarque : Si $\operatorname{Card}\Omega = n$ alors la probabilité de chaque événement élémentaire est $p = \frac{1}{n}$.

ω	ω_1	ω_2	$\cdots$	ω_n
$\mathbf{P}(\{\omega\})$	p	p	$\cdots$	p

Proposition

Soit Ω un univers fini, et $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Alors pour tout événement A,

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}_{\text{ÉQUIPROBABILITÉ}}$$

Remarque : L'hypothèse d'équiprobabilité s'applique lorsqu'aucun événement élémentaire n'est favorisé. On la repère dans un énoncé lorsqu'il est dit que le dé est *équilibré*, que la pièce est *non truquée*, que les boules tirées sont *indiscernables au toucher*...

III Probabilité conditionnelle

1 Définition

Définition

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$ et A un événement tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$.

$\mathbf{P}_A : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \\ B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} \end{cases}$ est une probabilité sur Ω appelée **probabilité conditionnelle sachant** A**.**

La probabilité conditionnelle de B sachant A est notée $\mathbf{P}_A(B)$ ou encore $\mathbf{P}(B|A)$.

En général, c'est la probabilité conditionnelle qui est donnée par l'expérience.

On calcule alors $\mathbf{P}(A \cap B)$ par la **formule du conditionnement** $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B)}$

2 Trois formules fondamentales

a Formule des probabilités composées

Théorème

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.
$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ est une famille finie d'événements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors on a :

Formule des probabilités composées

$$\boxed{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

b Formule des probabilités totales

THÉORÈME

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.
On considère un système complet d'événements $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$.
Alors, pour tout événement B, on a :

$$\boxed{\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B \cap A_i)}$$

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Si de plus aucun des A_i n'a une probabilité nulle, alors :

$$\boxed{\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}_{A_i}(B)}$$

Formule des probabilités totales

c Formule de Bayes

Théorème

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.
Soient A, B deux événements de probabilités non nulles. Alors :

$$\boxed{\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}\mathbf{P}_A(B)}$$

Formule de Bayes

IV Indépendance

DÉFINITION

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.
On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$$

Remarque : Supposons que A soit tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Alors :

A et B sont indépendants $\iff \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) \iff \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B) \iff \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.

Définition

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.
On considère une famille finie d'événements $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ (avec $n \in \mathbf{N}^\star$).

- Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits **deux à deux indépendants** lorsque :
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \ \ i \neq j \Rightarrow \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}(A_j)$$

- Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** lorsque :
$$\forall I \subset [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$$

Remarques :

- L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
- Des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants.