Corrigé du DS n°4

Exercice 1 : $u_n = n\sin(\frac{3}{n+3})(1-\frac{2}{n+2})^n$

D'une part, $\dfrac{3}{n+3} \longrightarrow 0$ donc par équivalent usuel : $\sin\left(\dfrac{3}{n+3}\right) \sim \dfrac{3}{n+3} \sim \dfrac{3}{n}$.
Par produit d'équivalents : $n\times\sin\left(\dfrac{3}{n+3}\right) \sim n\times\dfrac{3}{n} = 3$, donc converge vers 3.
D'autre part, $\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)^n = \exp\left(n\ln(1-\frac{2}{n+2})\right)$.
Puisque $-\dfrac{2}{n+2} \longrightarrow 0$, et par équivalent usuel : $\ln\left(1-\frac{2}{n+2}\right) \sim -\dfrac{2}{n+2} \sim -\dfrac{2}{n}$.
Par produit d'équivalents, $n\ln\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right) \sim n\times\left(-\dfrac{2}{n}\right) = -2$ donc $n\ln\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right) \longrightarrow -2$.

Par composée de limites, $\exp\left(n\ln(1-\frac{2}{n+2})\right) \longrightarrow e^{-2}$.

Conclusion : par opérations sur les limites, $\boxed{\lim u_n = 3e^{-2}.}$

Exercice 2 : Système linéaire

1) Pour $m=1$, on obtient sous forme matricielle : $(S_1) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -6 & 2 \\ 3 & -6 & -9 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$$(S_1) \underset{\substack{L_1\leftarrow -L_1 \\ L_2\leftarrow \frac{1}{3}L_2}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+L1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$(S_1) \underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_3 \\ L_2\leftarrow \frac{1}{3}L_2}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 6 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -9 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3+4L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 6 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \end{array}\right)$$

Le système (S_1) possède 3 pivots : $\boxed{\mathrm{rg}(S_1) = 3 \text{ et } (S_1) \text{ est de Cramer.}}$
On résout par remontée : $L_3 \Rightarrow z = 1$, $L_2 \Rightarrow y = -1-2z = -3$ et $L_1 \Rightarrow x = -2-2y-6z = -2$.
En conclusion : $\boxed{(S_1) \text{ possède pour unique solution le triplet } (-2,-3,1).}$

2) Soit m un réel. Le système (S_m) a pour écriture matricielle :

$(S_m) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -m & -2 & -6 & 2 \\ 3 & -5-m & -9 & 3 \\ -1 & 1 & 1-m & -1 \end{array}\right)$ On peut changer L_3 en $-L_3$ et choisir 1 comme pivot :

$(S_m) \underset{\substack{L_3\leftarrow -L_3 \\ L2\leftarrow L_2-3L_3 \\ L_1\leftarrow L_1+mL_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2-m & m^2-m-6 & m+2 \\ 0 & -2-m & -6-3m & 0 \\ \boxed{1} & -1 & m-1 & 1 \end{array}\right)$ On peut maintenant soustraire $L_2 - L_1$:

$$(S_m) \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & m^2+2m & m+2 \\ 0 & -2-m & -6-3m & 0 \\ \boxed{1} & -1 & m-1 & 1 \end{array}\right)$$

<u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : $-2-m=0$ (ie : $m=-2$)

$(S_{-2}) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$ (S_{-2}) est de rang 1 et possède 2 équations auxiliaires vérifiées.

Il est donc compatible, et possède 2 variables libres : $\boxed{\mathrm{rg}(S_{-2}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{-2} = \left\{(y+3z+1,\, y,\, z),\ (y,z)\in\mathbf{R}^2\right\}.}$

<u>2$^{\text{ème}}$ cas</u> : $-2-m \neq 0$ (ie : $m\neq -2$) Alors $-2-m$ est un pivot.
On résout l'équation $m^2+2m=0$ pour savoir si ce coefficient est un pivot.
$m^2+2m=0 \Leftrightarrow m(m+2)=0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m=-2$. Mais on est dans le cas où $m\neq -2$.

* <u>1$^{\text{er}}$ sous-cas</u> : $m=0$

$(S_0) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{-2} & -6 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ (S_0) est de rang 2 et possède une équation auxiliaire non vérifiée.

Il est donc incompatible : $\boxed{\mathrm{rg}(S_0) = 2 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_0 = \varnothing.}$

$\ast$ 2$^{\text{ème}}$ sous-cas : $m \neq 0$

Alors $m^2 + 2m \neq 0$ donc c'est un pivot. (S_m) est donc de rang 3. Il est de Cramer puisqu'il est carré et de rang maximal, et possède donc un unique triplet solution, qu'on trouve par remontée :

$$(S_m) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{m(m+2)} & m+2 \\ 0 & \boxed{-2-m} & -3(2+m) & 0 \\ \boxed{1} & -1 & m-1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{m+2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{m+2} L_2}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{m} & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & m-1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \Leftrightarrow mz = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{m}, \quad L_2 \Leftrightarrow y + 3z = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{m}$ et $L_3 \Leftrightarrow x - y + (m-1)z = 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{m} + \dfrac{1-m}{m} + 1 = -\dfrac{2}{m}$

$$\boxed{\forall m \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0, -2\},\ \mathrm{rg}(S_m) = 3 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_m = \left\{\left(-\frac{2}{m}, -\frac{3}{m}, \frac{1}{m}\right)\right\}.}$$

Exercice 3

1. Fonction renvoyant u_n

```
def U(n, u0, u1, u2) :
    if n == 0 : return u0
    if n == 1 : return u1
    if n == 2 : return u2
    return 5*U(n-1,u0,u1,u2) - 8*U(n-2,u0,u1,u2) + 4*U(n-3,u0,u1,u2)
```

2. Fonction renvoyant la somme des premiers termes de la suite (u_n)

```
def SOMME(n, u0, u1, u2) :
    s = 0
    for k in range(n+1) :
        s += U(k, u0, u1, u2)
    return s
```

Remarque : ces deux réponses, simples à coder, sont particulièrement gourmandes en calculs...

3. (a) Premiers termes de la suite (v_n).

$v_0 = u_1 - 2u_0 = -5$ et $v_1 = u_2 - 2u_1 = -5$. Ainsi : $\boxed{v_0 = v_1 = -5}$

(b) Relation de récurrence pour (v_n).

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n &= u_{n+3} - 2u_{n+2} - 3(u_{n+2} - 2u_{n+1}) + 2(u_{n+1} - 2u_n) \\ &= u_{n+3} - 5u_{n+2} + 8u_{n+1} - 4u_n \\ &= 0 \quad \text{car la suite } (u_n) \text{ vérifie la relation } (\mathcal{R}). \end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 0}$.

(c) La suite (v_n) est constante.

$\ast$ Première preuve, par récurrence.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}_n : v_n = -5$.

• Initialisation aux rangs $n = 0$ et $n = 1$: cf **3a)**

• Hérédité (double) à partir du rang 0 :

soit $n \geqslant 0$ et supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies.

Alors : $v_{n+2} = 3(-5) - 2(-5) = -5$, donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

• Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est initialisée aux rangs 0 et 1, et doublement héréditaire à partir du rang 0. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$: $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ v_n = -5}$.

$\ast$ Deuxième preuve, en résolvant la relation de récurrence.

L'équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$, de racines 1 et 2.

Donc : $\exists (A, B) \in \mathbf{R}^2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ v_n = A \times 1^n + B \times 2^n$.

On sait que $v_0 = v_1 = -5$ donc on trouve $A = -5$ et $B = 0$ en résolvant un système.
Même conclusion.

(d) Expression de (u_n).
$\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = -5 = u_{n+1} - 2u_n$, donc $u_{n+1} = 2u_n - 5$: (u_n) est arithmético-géométrique.
Le point fixe vérifie : $\ell - 2\ell = -5$, donc $\ell = 5$.
La suite $(u_n - 5)_n$ est donc géométrique de raison 2 :
$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n - 5 = (u_0 - 5)2^n$, d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 5 - 2^n}$.

$$\boxed{\textbf{Problème : } u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}}$$

1. $u_1 = \dfrac{1+u_0}{2+u_0} = \dfrac{1+1}{2+1} = \dfrac{2}{3}$. $\quad u_2 = \dfrac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{2}{3}} = \dfrac{5}{8}$.
2.
```
def u(n) :
    if n==0 : return 1
    a = u(n-1)
    return (1+a)/(2+a)
```
3. f est dérivable par opérations sur $I = [0,1]$, et $\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{2+x-(1+x)}{(2+x)^2} = \dfrac{1}{(2+x)^2} > 0$.
   Ainsi f est strictement croissante sur I.
   Elle y admet comme minimum $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et comme maximum $f(1) = \dfrac{2}{3}$.
4. D'après les variations de f : $\boxed{\forall x \in I,\ f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset I.}$
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: "$u_n \in I$ ".
   $\star$ Initialisation pour $n = 0$: $u_0 = 1 \in I$ donc $\mathcal{P}_0$ vraie.
   $\star$ Hérédité à partir de $n = 0$: soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, donc $u_n \in I$.
   Ainsi, $u_n \neq -2$ donc u_{n+1} existe, et $u_{n+1} = f(u_n)$ donc d'après **4)**, $u_{n+1} \in I$. $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.
   $\star$ Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 0, \mathcal{P}_n$ vraie. $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in I.}$
6. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{Q}_n$: "$u_{n+1} \leqslant u_n$ ".
   $\star$ Initialisation pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{2}{3}$ donc $u_1 \leqslant u_0$: $\mathcal{Q}_0$ vraie.
   $\star$ Hérédité à partir de $n = 0$: soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{Q}_n$ vraie, donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   f est croissante sur I, et $u_n, u_{n+1} \in I$, donc $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$, soit : $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, $\mathcal{Q}_{n+1}$ vraie.
   $\star$ Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 0, \mathcal{Q}_n$ vraie. $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$
7. (u_n) est décroissante et minorée par 0. Ainsi $\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite } \ell.}$
   Puisque $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in I$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc par passage à la limite : $\boxed{0 \leqslant \ell \leqslant 1.}$
8. Par opérations sur les limites : $\boxed{\dfrac{1+u_n}{2+u_n} \longrightarrow \dfrac{1+\ell}{2+\ell}.}$
9. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2+u_n} \longrightarrow \ell$ donc par unicité de la limite : $\ell = \dfrac{1+\ell}{2+\ell}$.
   On résout cette équation (du second degré) : $\ell = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   Mais $\ell \geqslant 0$, donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$
10.
```
def approximation(epsilon) :
    n,u = 0,1
    while abs(u- ℓ ) >= epsilon :
        u = (1+u)/(2+u)
        n += 1
    return n
```

11. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2+u_n} = \dfrac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2+\frac{a_n}{b_n}} = \dfrac{b_n+a_n}{2b_n+a_n}$ donc $\boxed{a_{n+1} = a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n + 2b_n.}$

12. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n &= (a_{n+1} + b_{n+1}) - 3a_{n+1} + a_n = -2a_{n+1} + (a_n + 2b_n) + a_n \\ &= -2a_{n+1} + 2a_n + 2(a_{n+1} - a_n) = 0. \end{aligned}$$

13. La suite (a_n) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 5 > 0$,

et de racines réelles $\varphi = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Il existe des constantes A, B telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = A\varphi^n + B\psi^n$.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A\varphi + B\psi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 3B = 3 \\ (3+\sqrt{5})A + (3-\sqrt{5})B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

En conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^n + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\psi^n.}$

14. $\varphi > 1$ donc $\varphi^n \longrightarrow +\infty$, et $-1 < \psi < 1$ donc $\psi^n \longrightarrow 0$.

Ainsi, $\beta\psi^n = o(\alpha\varphi^n)$ car $\alpha \neq 0$, et $\delta\psi^n = o(\gamma\varphi^n)$ car $\gamma \neq 0$.

On a donc $\alpha\varphi^n + \beta\psi^n \sim \alpha\varphi^n$, et $\gamma\varphi^n + \delta\psi^n \sim \gamma\varphi^n$.

Par quotient : $\boxed{\dfrac{\alpha\varphi^n + \beta\psi^n}{\gamma\varphi^n + \delta\psi^n} \sim \dfrac{\alpha\varphi^n}{\gamma\varphi^n} = \dfrac{\alpha}{\gamma}.}$

15. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a : $u_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_n}{a_{n+1} - a_n} = \dfrac{\alpha\varphi^n + \beta\psi^n}{\alpha\varphi^{n+1} + \beta\psi^{n+1} - \alpha\varphi^n - \beta\psi^n} = \dfrac{\alpha\varphi^n + \beta\psi^n}{\alpha(\varphi-1)\varphi^n + \beta(\psi-1)\psi^n}$

en posant : $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$.

D'après la question précédente, $u_n \sim \dfrac{\alpha}{\alpha(\varphi-1)} = \dfrac{1}{\varphi-1}$

On simplifie $\dfrac{1}{\varphi-1} = \dfrac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1} = \dfrac{2}{3+\sqrt{5}-2} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$u_n \sim \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \ell.}$