DS n°4, mathématique

Durée : 3 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit.
Le sujet comporte 2 pages, et se compose de 3 exercices indépendants, et d'un problème.

Exercice 1 : Limite d'une suite

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = n \times \sin\left(\dfrac{3}{n+3}\right) \times \left(1 - \dfrac{2}{n+2}\right)^n$.

Exercice 2 : Système d'équations linéaires

Soit m un nombre réel fixé. On considère le système à paramètre suivant :

$$(S_m) \quad \begin{cases} -mx - 2y - 6z = 2 \\ 3x - (5+m)y - 9z = 3 \\ -x + y + (1-m)z = -1 \end{cases}$$

d'inconnus les triplets de réels $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

1. On suppose dans cette question que $m = 1$.
   Réécrire le système (S_1) correspondant, puis le résoudre.
   On précisera son rang, et s'il est de Cramer.
2. Dans le cas général, résoudre le système (S_m) selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbf{R}$.
   Préciser dans chaque cas le rang de ce système.

Exercice 3 : Suites récurrentes d'ordre 3

On considère l'ensemble E des suites définies par :

$$\begin{cases} u_0, u_1, u_2 \in \mathbf{R} \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} - 5u_{n+2} + 8u_{n+1} - 4u_n = 0 \quad (\mathcal{R}). \end{cases}$$

1. Écrire en langage *Python* une fonction `U` qui prend en arguments un entier `n` et trois flottants `u0, u1, u2`, et qui renvoie la valeur de u_n.
2. En déduire une fonction d'arguments $n \in \mathbf{N}$ et $u_0, u_1, u_2 \in \mathbf{R}$, renvoyant la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
3. Dans cette question, on considère la suite (u_n) de E telle que :
   $$u_0 = 4,\ u_1 = 3,\ u_2 = 1.$$
   Soit (v_n) la suite de terme général : $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.
   (a) Calculer v_0 et v_1.
   (b) Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n$.
   (c) En déduire que la suite (v_n) est constante.
   (d) Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Problème : Étude d'une suite récurrente

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2+u_n} \end{cases}$$

On pose également la fonction f définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$ par : $\forall x \neq -2,\ f(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. En langage *Python*, définir une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}$ renvoyant u_n.

On pose I l'intervalle $I = [0,1]$.

3. Étudier la fonction f sur l'intervalle I : tableau de variations, valeurs extrêmes.
4. Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) \in I$ (c'est-à-dire que I est stable par f).
5. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in I$.
6. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
7. En déduire que (u_n) est convergente, vers une limite ℓ vérifiant : $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
8. Exprimer en fonction de ℓ la limite de $\dfrac{1+u_n}{2+u_n}$.
9. En déduire la valeur de ℓ.
10. Écrire en langage *Python* une fonction d'argument $\varepsilon > 0$ renvoyant la première valeur de l'indice n vérifiant : $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
    On pourra considérer que ℓ a été définie comme variable globale.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est un nombre rationnel : $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ où a_n, b_n sont des entiers (strictement positifs) qu'on peut choisir sans facteurs communs (fraction irréductible).
$u_0 = 1 = \dfrac{1}{1}$ donc on pose $a_0 = b_0 = 1$.

11. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation : $\forall n \geqslant 0,\ \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

On admet que cette relation implique que la fraction $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ est encore irréductible.

12. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$.
13. On pose $\varphi = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.
    Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer a_n en fonction de φ, ψ et n.
14. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des constantes non nulles.
    En remarquant que $\varphi > 1$ et $-1 < \psi < 1$, expliquer pourquoi : $\dfrac{\alpha\varphi^n + \beta\psi^n}{\gamma\varphi^n + \delta\psi^n}$ équivaut à $\dfrac{\alpha}{\gamma}$.
15. En utilisant l'expression : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1} - a_n}$, retrouver le résultat de la question **9)**.