Applications

I Fonctions, applications

1 Fonction

Définition

Soient E et F deux ensembles, et soit G une partie de $E \times F$ telle que, pour tout $x \in E$, il existe *au maximum* un élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$.
Alors le triplet $f = (E, F, G)$ est appelé **fonction** de E vers F.

- E est l'**ensemble de départ** de la fonction f,
- F est l'**ensemble d'arrivée** de la fonction f,
- G est le **graphe** de la fonction f.

2 Application

DÉFINITION

Soit $f = (E, F, G)$ une fonction. On dit que f est une **application** de E vers F lorsque, pour tout $x \in E$, il existe *exactement* un élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$.
Pour tout $x \in E$, on note $f(x)$ l'unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$. $f(x)$ est appelé l'**image** de x par f.
Soit $y \in F$. Un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelé **un antécédent** de y par f.

Notation : On écrit alors $$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$
Un élément $y \in F$ peut n'avoir aucun antécédent par f, un unique antécédent, ou plusieurs antécédents (éventuellement une infinité).

Définition

Soit $f = (E, F, G)$ une fonction.

- L'ensemble $\{x \in E,\ \exists y \in F,\ \ (x, y) \in G)\}$ est **l'ensemble de définition** de la fonction f.
- L'ensemble $\{y \in F,\ \exists x \in E,\ \ (x, y) \in G\}$ est **l'ensemble des valeurs prises** par f, appelé également **ensemble image** de f.

Définition

Soient E et F deux ensembles.
On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou encore F^E l'ensemble des applications de E vers F.

3 Exemples

Fonction identité : Soit E un ensemble.

L'application $Id_E : E \to E$ définie par : $\forall x \in E, \ \ Id_E(x) = x$ est appelée la *fonction identité* de E.

Fonction indicatrice : Soit E un ensemble, et soit A une partie de E.

L'application $\chi_A : E \to \{0,1\}$ définie par : $\forall x \in E,\ \ \chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon, est appelée la *fonction indicatrice* de A. On parle aussi de *fonction caractéristique* de A, et on note parfois $\mathbb{1}_A$.

PROPRIÉTÉ

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E. Alors :

$\chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B$ $\qquad \chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$ $\qquad \chi_A \leqslant \chi_B \Leftrightarrow A \subset B$

$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$ $\qquad \chi_A = \chi_B \Leftrightarrow A = B$

4 Images directes et réciproques

Soit $f : E \to F$ une application, et soient $A \subset E$ et $B \subset F$ des parties de E et de F.

DÉFINITION

On appelle **image directe de A par f** l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F,\ \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$

On appelle **image réciproque de B par f** l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$$

Remarques : $f(A)$ est une partie de F, $f^{-1}(B)$ est une partie de E.

$f(A)$ est l'ensemble des images de tous les éléments de A.

$f^{-1}(B)$ est l'ensemble de tous les éléments de E dont l'image est dans B.

Attention : Ne pas confondre $f(A)$ avec $f(x)$!

II Composée

DÉFINITION

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
La **composée** de f par g, notée $g \circ f$, est l'application $g \circ f : E \to G$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$

Schéma de composition :

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g\big(f(x)\big)
\end{tikzcd}
$$

2 Exemples

3 Elément neutre

Propriété

Les fonctions identités sont les éléments neutres de la composition :

$$\forall f \in \mathcal{F}(E,F), \quad f \circ Id_E = f \ \text{ et } \ Id_F \circ f = f$$

III Restriction, prolongement

Soit $f : E \to F$ une application, et soit $A \subset E$ une partie de E.

DÉFINITION

On appelle **restriction** de f à A l'application $\begin{array}{r} \tilde{f} : A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ qu'on notera $f|_A$.

Si g est une restriction de f, alors on dit que f est un **prolongement** de g.

IV Injection, surjection

Soit $f : E \to F$ une application.

1 Définitions

Définition

On dit que f est une **injection** de E dans F lorsque :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

On dit que f est une **surjection** de E sur F lorsque :

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E, \quad y = f(x)$$

En d'autres termes :

- f est **injective** lorsque deux éléments différents de l'ensemble de départ n'ont jamais la même image par f, *ie* : $\forall (x, x') \in E^2, \;\; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

  On peut dire aussi que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au plus** un antécédent par f.

- f est **surjective** lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au moins** un antécédent par f, *ie* : $f(E) = F$.

2 Exemples

3 Composées d'injections ou de surjections

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux applications telles que $g \circ f$ existe.
Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

4 Bijection

DÉFINITION

On dit que f est une **bijection** de E dans F lorsque :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ \ y = f(x)$$

Ainsi, f est bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **exactement** un antécédent par f.

On retient : $\boxed{f \text{ est bijective si, et seulement si, } f \text{ est injective } \textbf{et} \text{ surjective.}}$

5 Bijection réciproque

Soit $f : E \to F$ une application bijective.
Pour tout $y \in F$, notons $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f.

Théorème

L'application $f^{-1} : F \to E$ est une bijection de F dans E, appelée **bijection réciproque** de f.
Elle vérifie : $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

f est donc également la bijection réciproque de f^{-1}, c'est-à-dire : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

On a donc : $\forall (x,y) \in E \times F, \;\; y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

6 Composées de bijections

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux applications telles que $g \circ f$ existe.
Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

7 Exemples usuels

Exemples :

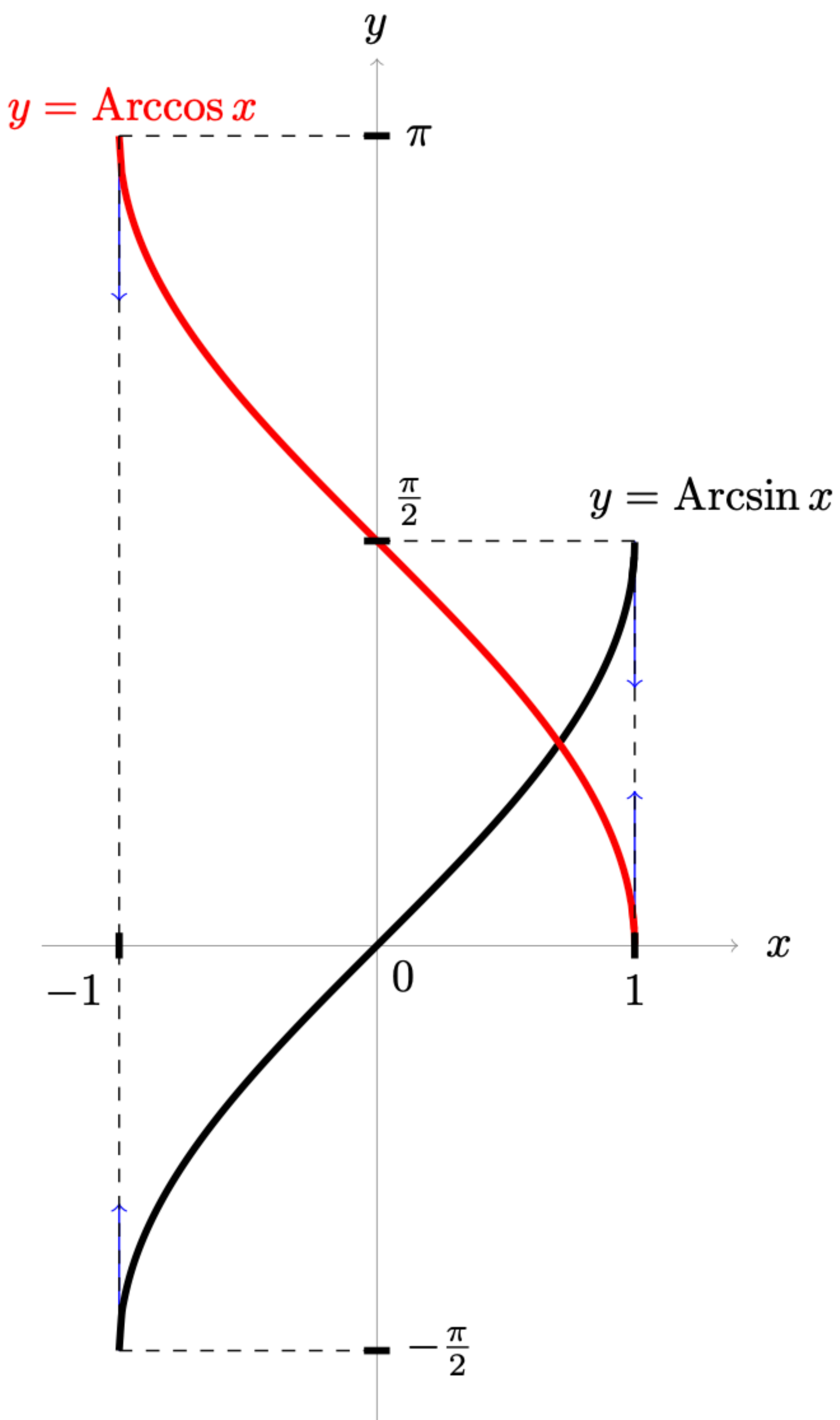
- La fonction $Id_E : E \to E$ est sa propre bijection réciproque.
- Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^\star$ et logarithme népérien $\ln : \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$ sont des bijections réciproques.

- Les fonctions racine-carrée : $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ et carrée : $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ sont des bijections réciproques.
- Les fonctions cosinus : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ et Arccosinus : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ sont des bijections réciproques.
- Les fonctions sinus : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ et Arcsinus : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sont des bijections réciproques.
- Les fonctions tangente : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}$ et Arctangente : $\mathbf{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont des bijections réciproques.

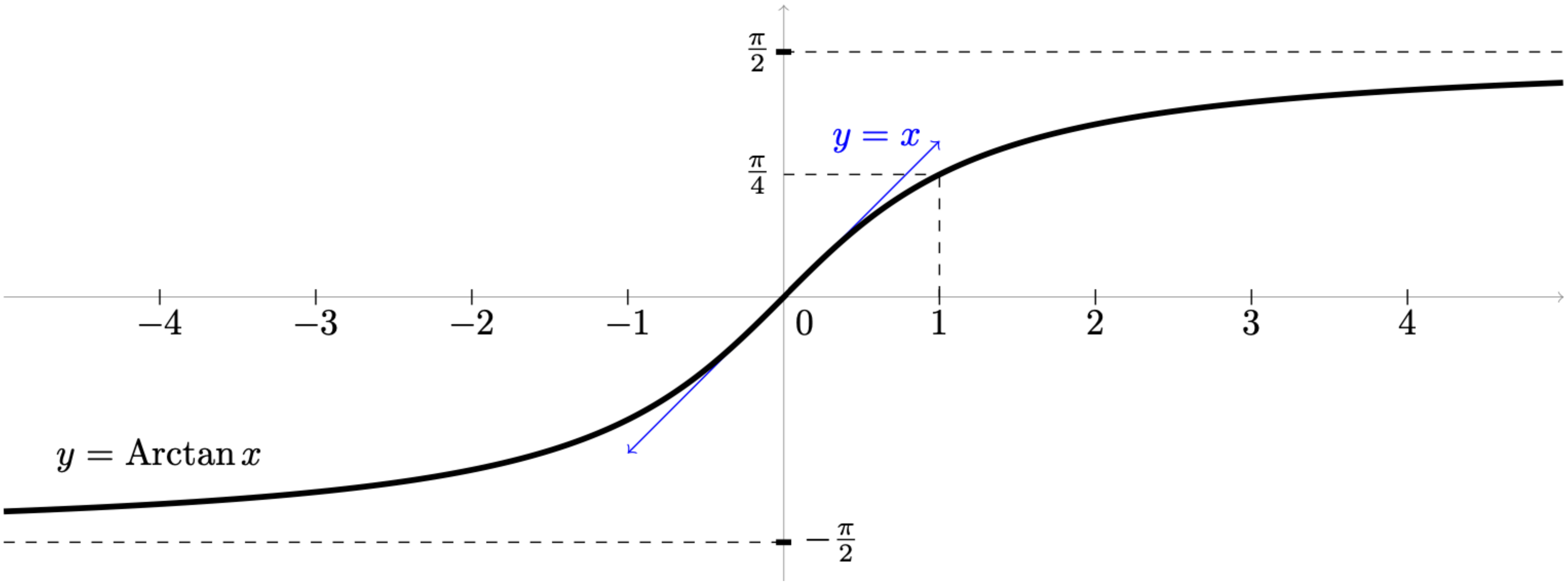
PROPRIÉTÉ

Si f est une bijection définie sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles, alors les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

8 Graphes des fonctions Arcsinus, Arccosinus, Arctangente :



y
$y = \mathrm{Arccos}\, x$
π
$\frac{\pi}{2}$
$y = \mathrm{Arcsin}\, x$
x
-1
0
1
$-\frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2}$
$y = x$
$\frac{\pi}{4}$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
$y = \mathrm{Arctan}\, x$
$-\frac{\pi}{2}$

V Fonctions de R dans R

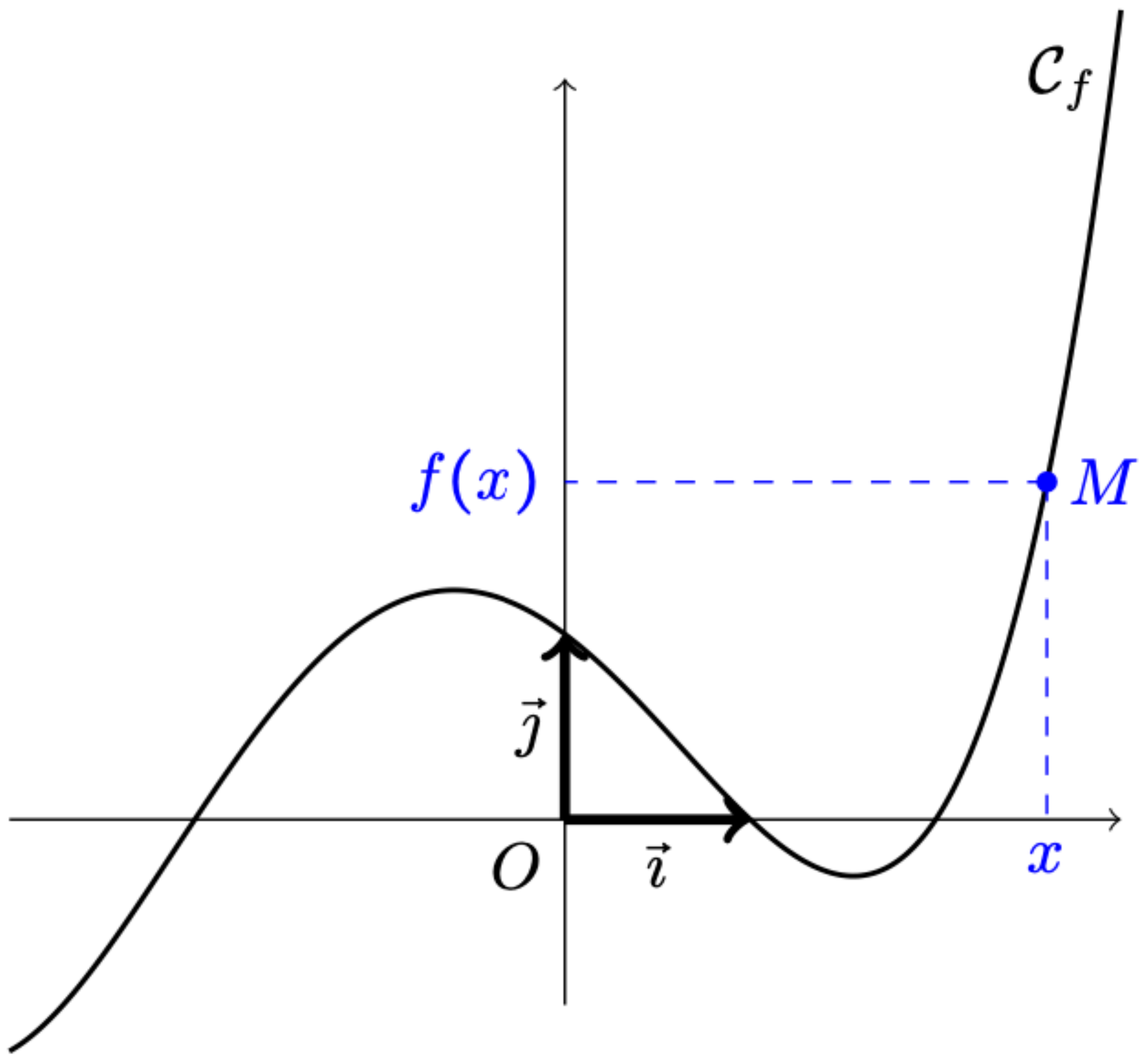
1 Représentations graphiques

Définition

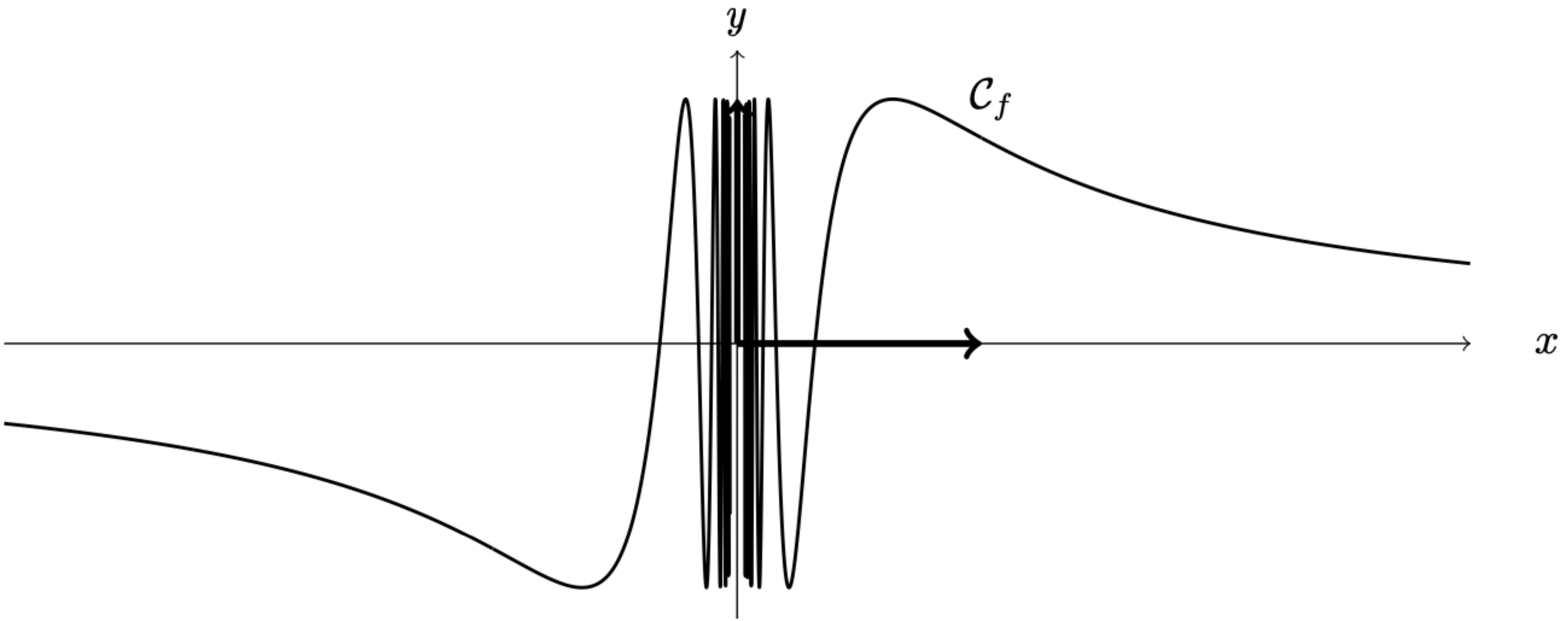
Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit D une partie de $\mathbf{R}$ et $f : D \to \mathbf{R}$.
On appelle **représentation graphique** ou **graphe** de f, et on note généralement $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, où x décrit D.

$$\mathcal{C}_f = \{M(x,y), x \in D \text{ et } y = f(x)\}$$

Exemple : Représentation graphique de $x \mapsto \dfrac{x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16}{16}$ sur l'intervalle [-3,3].



Remarque : on ne peut pas toujours tracer la représentation graphique d'une fonction.
Par exemple, la courbe de $f : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ produit des oscillations non représentables au voisinage de 0.

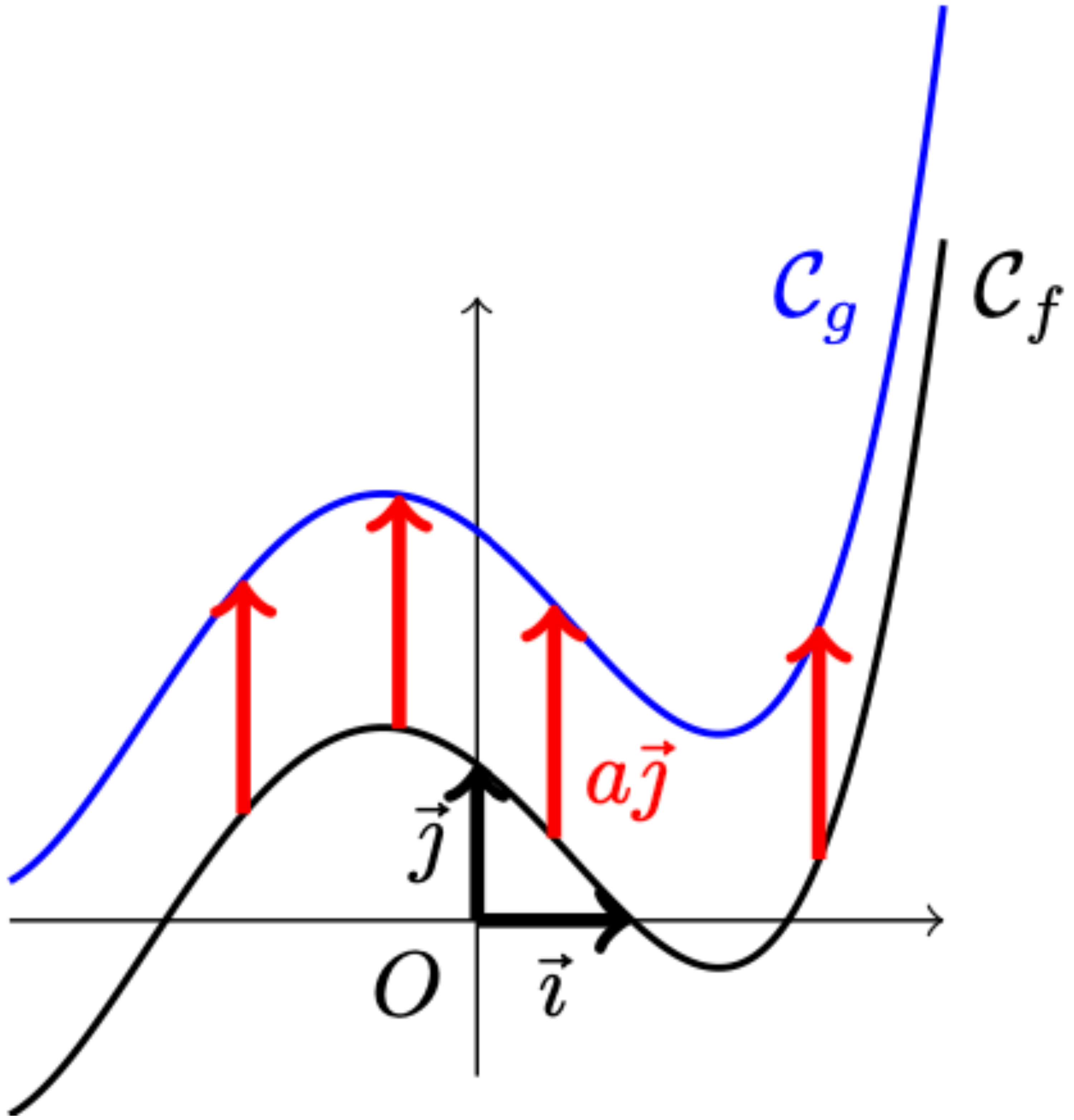


2 Graphes de fonctions associées

On considère une fonction f dont on connaît la représentation graphique $\mathcal{C}_f$.
On cherche à déterminer le graphe de certaines fonctions associées.

a Graphe de $x \mapsto f(x) + a$

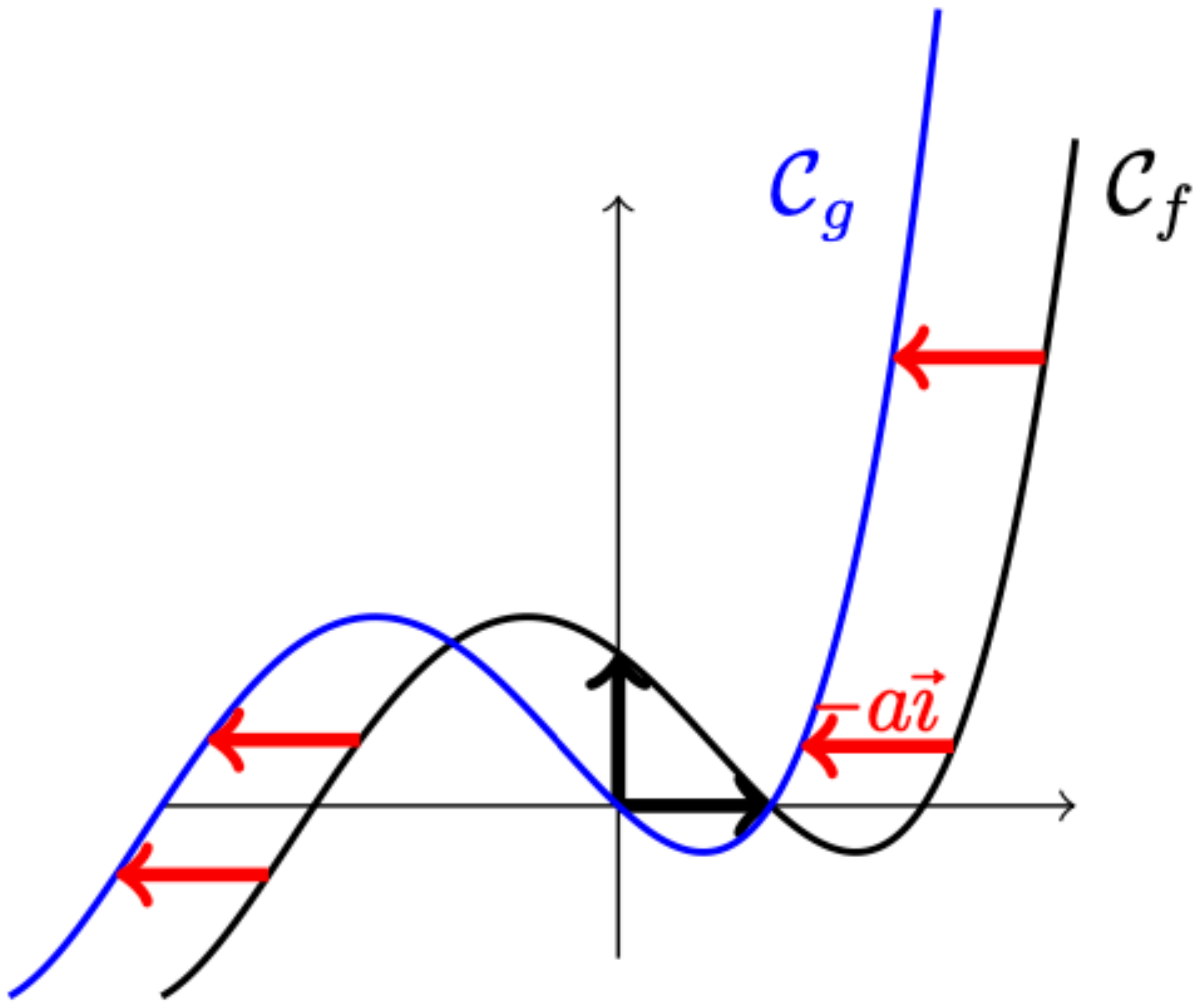
Soit $a \in \mathbf{R}$.
Le graphe de $g : x \mapsto f(x) + a$ se déduit de celui de f par la translation de vecteur $a\vec{j}$.



Proposition

Soit $a \in \mathbf{R}$.

Le graphe de $g : x \mapsto f(x+a)$ se déduit de celui de f par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.

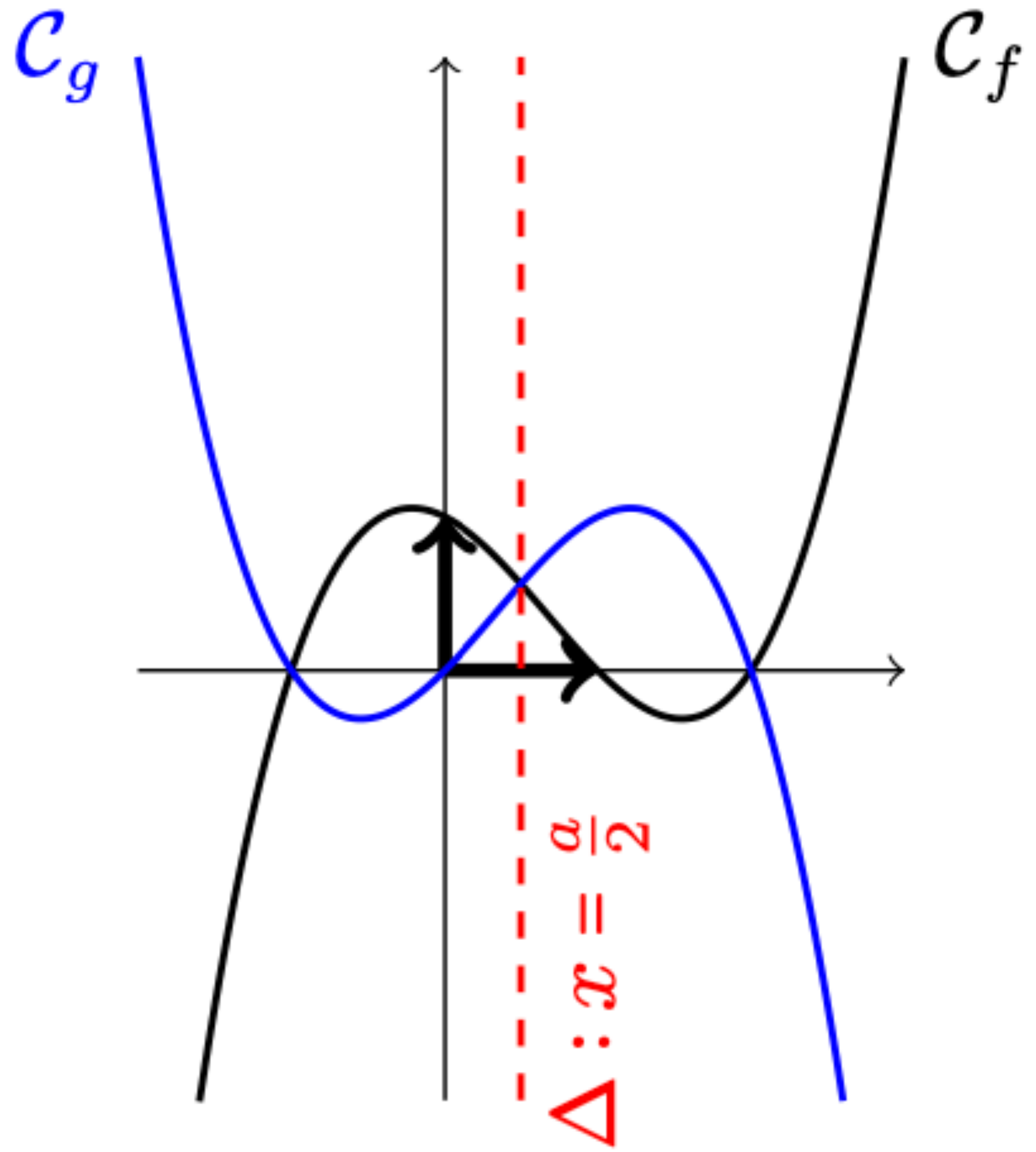


c Graphe de $x \mapsto f(a-x)$

Proposition

Soit $a \in \mathbf{R}$.

Le graphe de $g : x \mapsto f(a-x)$ se déduit de celui de f par la symétrie axiale par rapport à la droite Δ d'équation $x = \frac{a}{2}$.



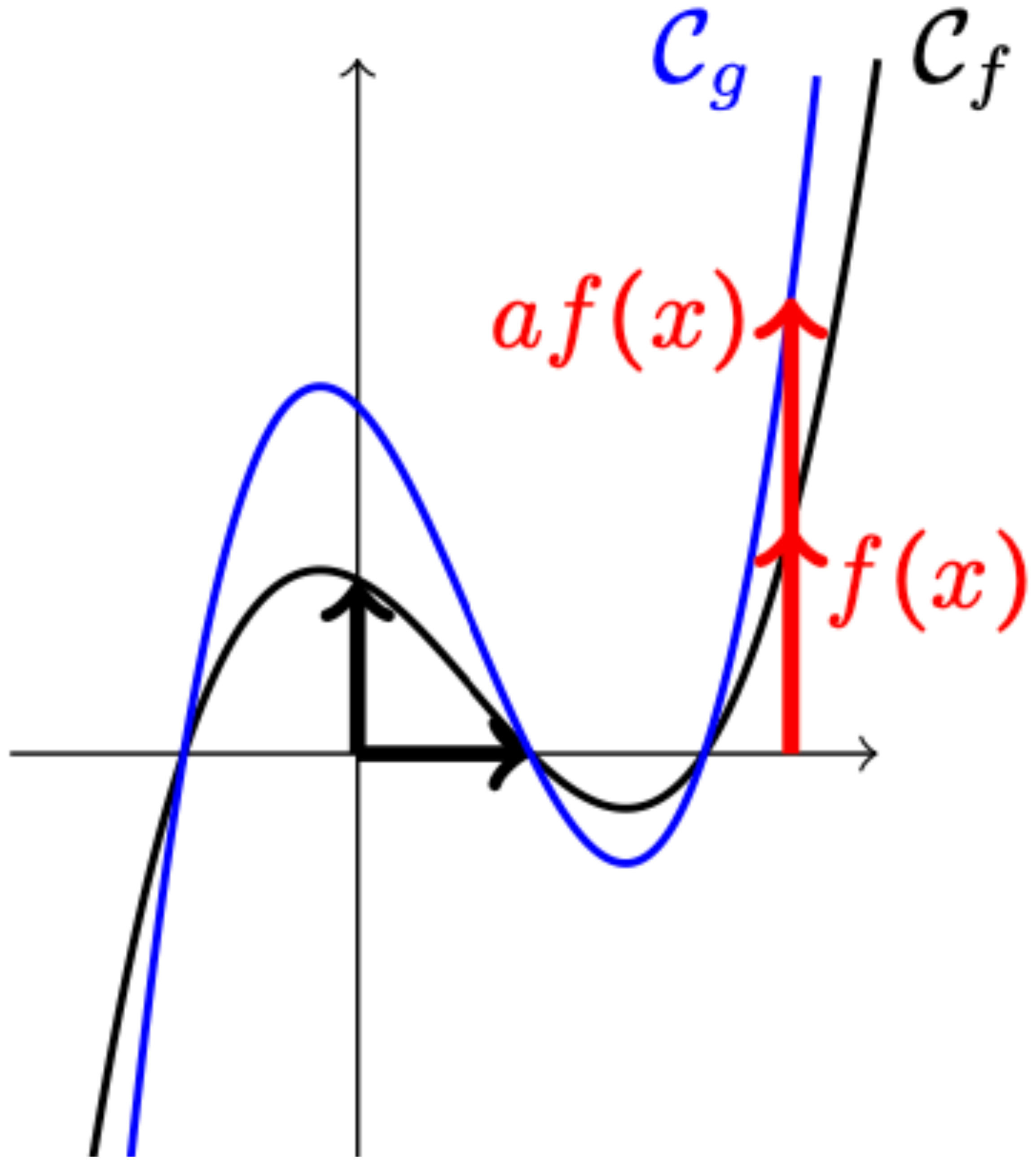
CAS PARTICULIER : si $a = 0$.
Le graphe de $x \mapsto f(-x)$ est symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe (Oy).

d Graphe de $x \mapsto af(x)$

Proposition

Soit $a \in \mathbf{R}^{\star}$.

Le graphe de $g : x \mapsto af(x)$ se déduit de celui de f par l'affinité orthogonale de base (Ox) et de rapport a, transformation qui laisse les abscisses inchangées, et qui multiplie les ordonnées par a.



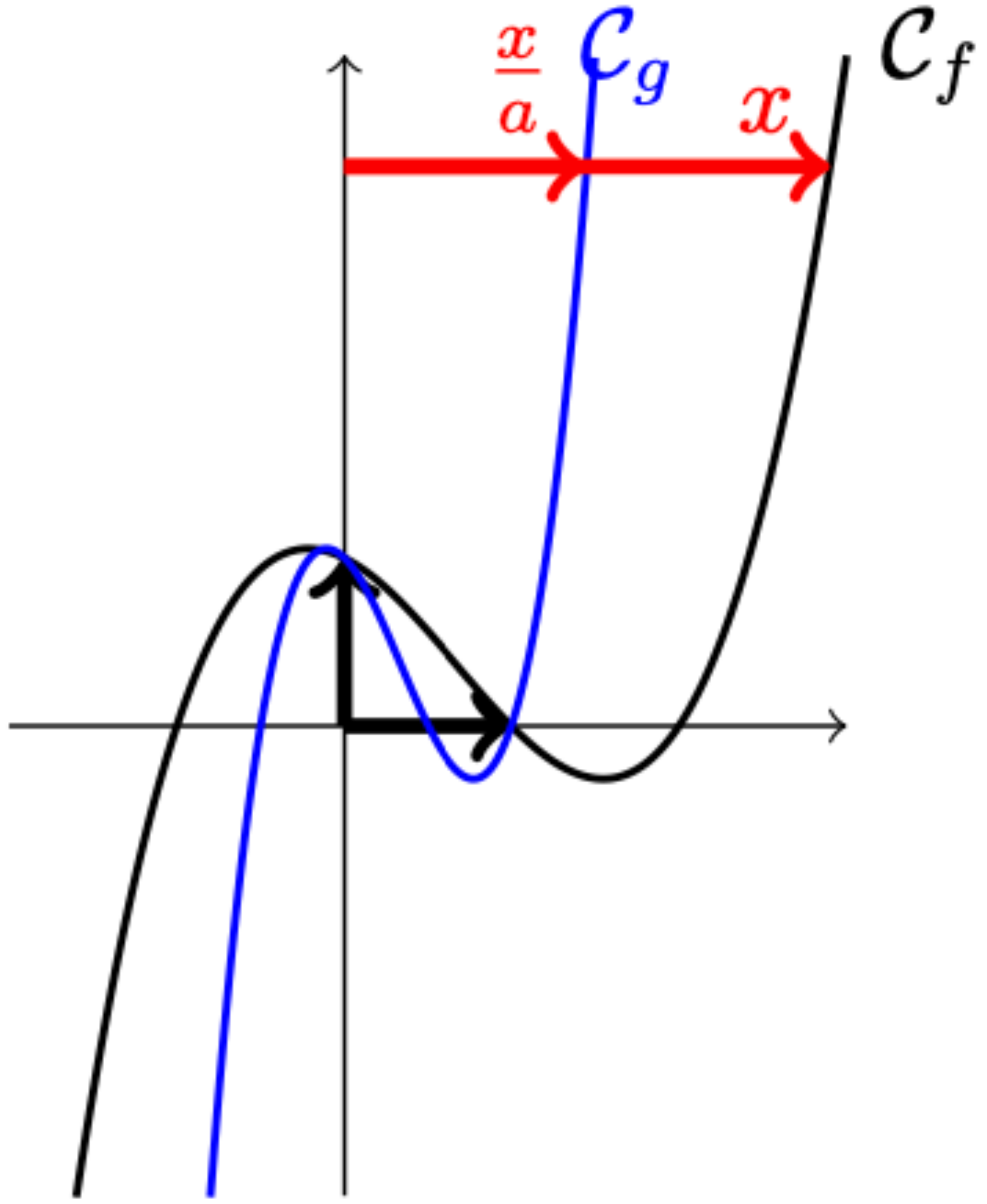
Cas particulier : si $a = -1$.
Le graphe de $x \mapsto -f(x)$ est symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe (Ox).

e Graphe de $x \mapsto f(ax)$

PROPOSITION

Soit $a \in \mathbf{R}^\star$.

Le graphe de $g : x \mapsto f(ax)$ se déduit de celui de f par l'affinité orthogonale de base (Oy) et de rapport $\frac{1}{a}$, *i.e.* les ordonnées sont inchangées, et les abscisses sont multipliées par $\frac{1}{a}$.



Cas particulier : si $a = -1$.
On retrouve le fait que le graphe de $x \mapsto f(-x)$ est symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe (Oy).

3 Graphes des bijections réciproques