Devoir Maison n°5

Exercice 1 : Puissance d'une matrice

Dans tout cet exercice, m désigne un paramètre réel, et on considère la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$$

On notera I la matrice identité de taille 3.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $(A_1)^n$.
2. Dans cette question, on suppose que m est différent de 1.

   a. Justifer le fait que A_m est inversible.

   b. Montrer que, pour tout $m \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $(A_m)^2$ est une combinaison linéaire de A_m et de I.

   c. En déduire une expression de $(A_m)^{-1}$ en fonction de A_m, I et m.

   d. Expliciter les coefficients de $(A_m)^{-1}$ en fonction de m.

3. On pose :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   a. Calculer J^2.

   b. Pour tout entier $k \geqslant 1$, en déduire une expression de J^k en fonction de J et de k.

   c. Pour tout réel m, exprimer A_m en fonction de I, J et m.

   d. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$(A_m)^n = I + (1 - (1-m)^n)\, J$$

   e. Dans le cas où $m \neq 1$, que donne la formule précédente quand $n = -1$?

Exercice 2 : Un problème de cartes

On dispose d'un jeu de 52 cartes, et on s'intéresse au jeu suivant : une personne tire au hasard et simultanément 5 cartes de ce paquet. Elle gagne si, parmi ces 5 cartes tirées, figure l'as de pique.

1. Combien y a-t-il de tirages simultanés possibles de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes ?
2. Parmi ces tirages, combien possèdent l'as de pique ?
3. En déduire la probabilité de gagner à ce jeu.

Alice, qui mélange le jeu et fait tirer les 5 cartes à Brice, se demande si elle ne pourrait pas tricher pour faire perdre Brice plus fréquemment. Au cours de son mélange, elle subtilise un certain nombre de cartes, qu'elle glisse dans sa poche. Elle ne peut pas choisir les cartes enlevées (sinon elle enlèverait l'as de pique, et Brice perdrait à coup sûr), mais elle peut choisir le nombre k de cartes enlevées du jeu. Soit $k \in [\![1, 47]\!]$. On note A l'événement « l'as de pique a été enlevé »,
et T l'événement « Brice a tiré l'as de pique ».

4. Préciser la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A(T)$.
5. Exprimer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{\overline{A}}(T)$ en fonction de k.
6. Déterminer la probabilité de A en fonction de k.
7. En déduire la probabilité de T en fonction de k.
   Quel conseil peut-on donner à Alice ?