Limites de fonctions réelles

I Limites

1 Cadre

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction réelle définie sur une partie D_f de $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad]A, +\infty[\cap D_f \neq \varnothing$$

Cette condition permet d'envisager l'étude des valeurs de $f(x)$ pour un réel x arbitrairement grand.

2 Limites finie en $\pm\infty$

DÉFINITION

Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in D_f, \quad x > \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$
et on dira que f *tend vers* ℓ, ou *converge vers* ℓ, lorsque x *tend* vers $+\infty$.

3 Limites infinie en $\pm\infty$

DÉFINITION

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in D_f, \quad x > \alpha \Rightarrow f(x) > M$$

  On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et on dira que f *tend vers* $+\infty$, ou *diverge vers* $+\infty$, lorsque x *tend* vers $+\infty$.

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ lorsque :

$$\forall m \in \mathbf{R}, \exists \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in D_f, \quad x > \alpha \Rightarrow f(x) < m$$

De façon similaire, on a les définitions suivantes pour les fonctions f telle que :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad]-\infty, A[\cap D_f \neq \varnothing$$

Définition

- Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in D_f, \quad x < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ lorsque :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in D_f, \quad x < \alpha \Rightarrow f(x) > M$$

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ lorsque :

$$\forall m \in \mathbf{R}, \exists \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in D_f, \quad x < \alpha \Rightarrow f(x) < m$$

4 Cas particuliers des suites réelles

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle.
Alors u est une fonction réelle dont l'ensemble de définition est : $D_u = \mathbf{N}$.
Les définitions ci-dessus s'appliquent à u et on retrouve les définitions connues des limites finies ou infinies des suites.

II Limites en un réel

1 Voisinage, point d'accumulation

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On pourra s'intéresser à la limite d'une fonction f en x_0 à la seule condition que l'on puisse "s'approcher infiniment près" de x_0 tout en restant dans l'ensemble de définition D_f.

Définition

Soit $D \subset \mathbf{R}$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On dit que x_0 est un **point d'accumulation** de D lorsque, pour tout $\eta > 0$, l'intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ rencontre D en un point autre que x_0.

Si x_0 n'est pas un point d'accumulation de D_f, on ne pourra pas s'intéresser à la limite de f en x_0.

Définition

Soit $D \subset \mathbf{R}$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.
On dit que x_0 est un **point d'accumulation à droite** de D lorsque $\forall \eta > 0,\ \ ]x_0, x_0+\eta[\cap D \neq \varnothing$.
On dit que x_0 est un **point d'accumulation à gauche** de D lorsque $\forall \eta > 0,\ \ ]x_0-\eta, x_0[\cap D \neq \varnothing$.

≪ à droite ≫ fait référence à la droite de x_0 lorsqu'on considère l'axe des réels orienté de gauche à droite dans le sens croissant.

Définition

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbf{R}$ est un **voisinage** de x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0-\eta, x_0+\eta[\subset \mathcal{V}$.
Un voisinage de $+\infty$ est une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbf{R}$ telle qu'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $]A, +\infty[\subset \mathcal{V}$.
Un voisinage de $-\infty$ est une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbf{R}$ telle qu'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $]-\infty, A[\subset \mathcal{V}$.

2 Limites finie ou infine en x_0

Soit x_0 un point d'accumulation de D_f.

DÉFINITION

- Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 lorsque :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > M$$

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 lorsque :

$$\forall m \in \mathbf{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < m$$

On note $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, ou $\lim_{x_0} f = \ell$ pour $\ell \in \mathbf{R}$ ou $\ell = \pm\infty$.

Remarque : on pourra rencontrer la notation $\overline{\mathbf{R}}$ pour désigner $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$|x - x_0| < \alpha$ est équivalent à $\quad x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha, \quad$ ou encore à $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

3 Limites à droite à gauche en x_0

DÉFINITION

Soit x_0 un point d'accumulation à droite de D_f, et soit $\ell \in \mathbf{R}$.
On dit que f a pour limite ℓ en x_0 *par valeurs supérieures*, ou *à droite*, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbf{R}_+^\star, \forall x \in D_f, \quad x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x_0^+} f = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \ell$

DÉFINITION

On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 *par valeurs supérieures*, ou *à droite*, lorsque :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \alpha \in \mathbf{R}_+^\star, \forall x \in D_f, \quad x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) > M$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x_0^+} f = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} +\infty$

Définition

On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 *par valeurs supérieures*, ou *à droite*, lorsque :

$$\forall m \in \mathbf{R}, \exists \alpha \in \mathbf{R}_+^\star, \forall x \in D_f, \quad x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) < m$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x_0^+} f = -\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} -\infty$

On a des définitions similaires lorsque x_0 est un point d'accumulation à gauche de D_f :

Définition

- Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 *par valeurs inférieures*, ou *à gauche*, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbf{R}_+^\star, \forall x \in D_f, \;\; x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 *par valeurs inférieures*, ou *à gauche*, lorsque :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \alpha \in \mathbf{R}_+^\star, \forall x \in D_f, \;\; x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M$$

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 *par valeurs inférieures*, ou *à gauche*, lorsque :

$$\forall m \in \mathbf{R}, \exists \alpha \in \mathbf{R}_+^\star, \forall x \in D_f, \;\; x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) < m$$

Exemples de notations : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x_0^-} f = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$ etc

III Propriétés des limites

1 Unicité de la limite

Propriété UNICITÉ DES LIMITES

$\boxed{\textbf{Les limites, limites à droite ou à gauche, si elles existent, sont uniques.}}$

2 Lien entre la limite, limite à droite et limite à gauche

Propriété

Soit x_0 un point d'accumulation à droite **et** à gauche de D_f, tel que $x_0 \notin D_f$.
Soit $\ell \in \mathbf{R}$ ou $\ell = \pm\infty$. Alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

3 Limite finie et fonction bornée

Propriété

Soit f une fonction admettant une limite $\ell \in \mathbf{R}$ en x_0.
Alors f est *bornée au voisinage de* x_0, *ie* :

$$\exists \eta > 0, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| \leqslant M$$

4 Opérations sur les limites

Dans tout le paragraphe, x_0 désigne un point d'accumulation commun aux ensembles de définition des fonctions considérées, ou éventuellement $\pm\infty$. Les résultats d'opérations sont valables pour les limites en x_0, ainsi que pour les limites à droite ou à gauche en x_0.

a. Limite d'une somme $f + g$:

limite en x_0 de f

limite en x_0 de g

	$\ell \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbf{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

b. Limite de $\lambda f, \;\lambda \in \mathbf{R}$:

limite en x_0 de f

	$\ell \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0
$\lambda > 0$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

c. Limite d'un produit $f.g$:

limite en x_0 de f

limite en x_0 de g

	0	$\ell \in \mathbf{R}^\star$	$\pm\infty$
0	0	0	FI
$\ell' \in \mathbf{R}^\star$	0	$\ell.\ell'$	$\infty^{(*)}$
$\pm\infty$	FI	$\infty^{(*)}$	$\infty^{(*)}$

(*) *appliquer la règle des signes*

d. Limite d'un inverse $\dfrac{1}{f}$:

limite en x_0 de f	0	$\ell \in \mathbf{R}^\star$	$\pm\infty$
limite de $\dfrac{1}{f}$	FI	$\dfrac{1}{\ell}$	0

e. Composée de limites

Théorème

> Soient $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbf{R}$ deux fonctions composables.
> On suppose qu'il existe x_0, x_1 et ℓ tels que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_1$ et $\lim\limits_{x \to x_1} g(x) = \ell$.
> Alors $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell$.

Remarque : x_0, x_1 et ℓ peuvent indifféremment être des réels, ou $\pm\infty$.

5 Extension des règles d'opérations

($x_0 \in \mathbf{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$)

- Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ et si g est minorée au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0}(f+g) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$ et si g est majorée au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0}(f+g) = -\infty$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = 0$ et si g est bornée au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0}(fg) = 0$

- Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ et si g est minorée par $m > 0$ au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0}(fg) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$ et si g est minorée par $m > 0$ au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0}(fg) = -\infty$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = 0$ et si $f > 0$ sur un voisinage de x_0 privé de x_0, alors $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = 0$ et si $f < 0$ sur un voisinage de x_0 privé de x_0, alors $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = -\infty$

IV Limites usuelles

1 Fonctions usuelles :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Si $n \in \mathbf{N}^\star$ est pair :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

Si $n \in \mathbf{N}$ est impair :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

Si $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$$

Si $\alpha \in \mathbf{R}_-^\star$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{Arctan} x = -\frac{\pi}{2}$$

Règles des fonctions polynomiales ou rationnelles (quotient de fonctions polynomiales) :
Les limites en $\pm\infty$ sont celles du monôme dominant ou du quotient des monômes dominants.

2 Croissances comparées :

$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}} = +\infty$$

$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^{\star}, \forall \beta > 0, \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^{\beta x} = 0$$

$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} |\ln x|^{\beta} = 0$$

V Limites et relation d'ordre

Dans les propriétés suivantes, x_0 désigne un réel ou $\pm\infty$, et $\ell, \ell' \in \mathbf{R}$.

1 Passage à la limite dans une inégalité :

PROPRIÉTÉ **Passage à la limite dans une inégalité**

- Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ et si $f \geqslant 0$ ou $f > 0$ sur un voisinage de x_0, alors $\ell \geqslant 0$.
- Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell'$, et si $f \leqslant g$ ou $f < g$ sur un voisinage de x_0, alors $\ell \leqslant \ell'$.

2 Théorème de comparaison :

PROPRIÉTÉ **Théorème de comparaison**

- Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ et $f \leqslant g$, alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ et $f \leqslant g$, alors $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

3 Théorème d'encadrement (des gendarmes) :

PROPRIÉTÉ **Théorème d'encadrement (des gendarmes)**

Si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell$ et si $f \leqslant g \leqslant h$ sur un voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

Propriété

Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ et si $a > \ell$ (resp : $a < \ell$), alors $f < a$ sur un voisinage de x_0 (resp : $f > a$).

VI Fonctions monotones

Propriété

• Soit f une fonction croissante et soit x_0 est un point d'accumulation à gauche de D_f.
Alors f admet en x_0 une limite à gauche $\ell \in \mathbf{R}$ ou $+\infty$.
Si de plus $x_0 \in D_f$, alors $\ell \in \mathbf{R}$ et $\ell \leqslant f(x_0)$.

• Soit f une fonction croissante et soit x_0 est un point d'accumulation à droite de D_f.
Alors f admet en x_0 une limite à droite $\ell \in \mathbf{R}$ ou $-\infty$.
Si de plus $x_0 \in D_f$, alors $\ell \in \mathbf{R}$ et $\ell \geqslant f(x_0)$.

On a des résultats similaires pour les fonctions décroissantes.

Cas particuliers :

- Si f est croissante et D_f n'est pas majoré, alors f admet une limite en $+\infty$, réelle ou égale à $+\infty$.

- Si $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ est croissante, alors :

  (*) si f est minorée, alors $\lim\limits_{a^+} f \in \mathbf{R}$;

  (*) si f est non minorée, alors $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$;

  (*) si f est majorée, alors $\lim\limits_{b^-} f \in \mathbf{R}$;

  (*) si f est non majorée, alors $\lim\limits_{b^-} f = +\infty$.

VII Comparaison de fonctions

1 Relation de négligeabilité ou prépondérance

Définition

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}$ ou $\pm\infty$, g ne s'annulant pas.
On dit que f est **négligeable** devant g en x_0, ou que g est **prépondérante** sur f, et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathrm{o}(g(x))$ ou $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$ lorsque $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

2 Fonctions équivalentes

DÉFINITION

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}$ ou $\pm\infty$, g ne s'annulant pas.

On dit que f est **équivalente** à g en x_0, et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$ lorsque $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

3 propriétés

Propriété

$x_0 \in \overline{\mathbf{R}},\ \lambda \in \mathbf{R}^\star,\ \alpha > 0$

- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(\lambda g)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow f^\alpha \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g^\alpha)$

- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$ et $g \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h) \Rightarrow f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow f \times h \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g \times h)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$ et $h \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(k) \Rightarrow f \times h \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g \times k)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow \dfrac{1}{g} \underset{x_0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{f}\right)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h)$ et $g \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h) \Rightarrow (f+g) \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h)$

Propriété

$x_0, x_1 \in \overline{\mathbf{R}},\ \alpha, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \ \Rightarrow\ (f+g) \underset{x_0}{\sim} g$
- $f \underset{x_0}{\sim} g \ \Leftrightarrow g \underset{x_0}{\sim} f$
- $f \underset{x_0}{\sim} g \ \Rightarrow f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k \Rightarrow f \times h \underset{x_0}{\sim} g \times k$

- $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow \alpha f \underset{x_0}{\sim} \alpha g$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k \Rightarrow \dfrac{f}{h} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g}{k}$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h \Rightarrow f \underset{x_0}{\sim} h$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x_1} \varphi = x_0 \Rightarrow f \circ \varphi \underset{x_1}{\sim} g \circ \varphi$.
- si $f \underset{x_0}{\sim} \lambda h$ et $g \underset{x_0}{\sim} \mu h$, alors $\begin{cases} \lambda + \mu \neq 0 \Rightarrow f + g \underset{x_0}{\sim} (\lambda + \mu) h \\ \lambda + \mu = 0 \Rightarrow f + g \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h) \end{cases}$
- si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, alors $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

4 Equivalents usuels en 0

$*$ Équivalents usuels en 0 : $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$; $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$; $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$;

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$; $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\forall \alpha \in \mathbf{R},\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x.$

5 Fonctions polynomiales ou rationnelles en $\pm\infty$

• En $\pm\infty$, une fonction polynomiale (*resp.* rationnelle) est équivalente à son terme de plus haut degré (*resp.* au quotient de ses termes de plus haut degré).

• En 0, une fonction polynomiale (*resp.* rationnelle) est équivalente à son terme de plus bas degré (*resp.* au quotient de ses termes de plus bas degré).