Exercice 9 :

1. Relation de récurrence
   Soit $k \geqslant 1$. Alors $(A_k, \overline{A_k})$ forme un système complet d'événements (SCE).
   D'après la formule des probabilités totales : $\mathbf{P}(A_{k+1}) = \mathbf{P}(A_{k+1} \cap A_k) + \mathbf{P}(A_{k+1} \cap \overline{A_k})$
   $= \mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}_{A_k}(A_{k+1}) + \mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)\mathbf{P}_{\overline{A_k}}(A_{k+1})$
   D'une part, $\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) = 1 - \mathbf{P}(A_k)$ (probabilité de l'événement contraire),
   d'autre part : $\mathbf{P}_{A_k}(A_{k+1}) = a$: c'est la probabilité que le bus A soit arrivé à l'heure au jour k,
   et : $\mathbf{P}_{\overline{A_k}}(A_{k+1}) = 1 - b$: c'est la probabilité que le bus B soit arrivé en retard au jour k, ce qui a décidé Mme T. à prendre le bus A au jour $(k+1)$.
   Ainsi, en notant pour tout $k \geqslant 1$, $a_k = \mathbf{P}(A_k)$: $a_{k+1} = a \times a_k + (1-b)(1-a_k)$
   ou encore : $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ a_{k+1} = (a+b-1)a_k + 1 - b.}$
2. Résolution
   On reconnaît une suite arithmético-géométrique.
   On en cherche le point fixe en résolvant l'équation : $\ell = (a+b-1)\ell + 1 - b$,
   ce qui donne : $\ell = \dfrac{1-b}{2-a-b}$. On notera que $2 - a - b \neq 0$ en supposant que $a < 1$ ou $b < 1$, c'est à dire qu'au moins un des deux bus n'est pas toujours à l'heure.
   La suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ définie par : $v_k = a_k - \ell$ est géométrique de raison $q = a + b - 1$.
   On a donc $\forall k \geqslant 1,\ v_k = v_1 \times q^{k-1}$ donc $\forall k \geqslant 1,\ a_k = (a_1 - \ell)q^{k-1} + \ell$.
   Le premier jour, Mme T. choisit un bus au hasard, donc $a_1 = \dfrac{1}{2}$.
   En conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbf{P}(A_k) = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1-b}{2-a-b}\right)(a+b-1)^{k-1} + \dfrac{1-b}{2-a-b}.}$
   Cas particulier : si $a = b$, la relation se simplifie en $\mathbf{P}(A_k) = \dfrac{1}{2}$.
3. Probabilité d'arriver à l'heure
   Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, notons H_n l'événement « Mme T. arrive à l'heure le jour n ».
   L'énoncé note : $p_n = \mathbf{P}(H_n)$.
   $(A_n, \overline{A_n})$ est un SCE. D'après la formule des probabilités totales :
   $\mathbf{P}(H_n) = \mathbf{P}(H_n \cap A_n) + \mathbf{P}(H_n \cap \overline{A_n}) = \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(H_n) + \mathbf{P}(\overline{A_n})\mathbf{P}_{\overline{A_n}}(H_n)$
   soit : $p_n = a_n \times a + (1 - a_n) \times b = b + (a-b)a_n$.
   En remplaçant a_n trouvé à la question précédente, et après quelques calculs :
   $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ p_n = \dfrac{a+b-2ab}{2-a-b} - \dfrac{\frac{1}{2}(b-a)^2}{2-a-b}(a+b-1)^{n-1}.}$
4. Limite de la suite $(p_n)_n$
   a et b désignent des probabilités, donc $a, b \in [0,1]$.
   Supposons que $a \in]0,1[$. Alors $-1 < a + b - 1 < 1$ donc $\lim(a+b-1)^{n-1} = 0$
   (limite d'une suite géométrique). Par opérations : $\boxed{\lim p_n = \dfrac{a+b-2ab}{2-a-b}.}$
   Si $a = 0$ et $b > 0$, alors $|a+b-1| < 1$ et la formule précédente s'applique : $\lim p_n = \dfrac{b}{2-b}$.
   Si $a = b = 0$, alors aucun bus n'arrive jamais à l'heure : $\forall n \geqslant 1$, $p_n = 0$.
   Si $a = 1$ et $b < 1$, alors la formule précédente s'applique : $\lim p_n = 1$.
   Enfin, si $a = b = 1$, alors les bus arrivent toujours à l'heure : $\forall n \geqslant 1$, $p_n = 1$.

Exercice 10 :

1. Un événement peut-il être indépendant de lui-même ?
   Soit A un événement. Alors A et A sont indépendants si et seulement si : $\mathbf{P}(A \cap A) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(A)$.
   Mais $A \cap A = A$, donc la relation s'écrit : $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A)^2$.
   Cette équation admet deux solutions : $\mathbf{P}(A) = 0$ ou $\mathbf{P}(A) = 1$.
   $\mathbf{P}(A) = 0$ implique $A = \varnothing$ et $\mathbf{P}(A) = 1$ implique $A = \Omega$, ceci étant vrai car l'univers est fini.
   L'énoncé impose $\mathbf{P}(A) \neq 0$, donc
   $\boxed{A = \Omega \text{ est le seul événement de probabilité non nulle et indépendant de lui-même.}}$

2. Deux événements incompatibles sont-ils dépendants ?
   Soient A et B deux événements incompatibles. Alors par définition, $A \cap B = \varnothing$, donc $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$.
   Ainsi, A, B indépendants se traduit par : $\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) = 0$
   donc $\mathbf{P}(A) = 0$ ou $\mathbf{P}(B) = 0$, donc $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$.
   $\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont non vides, alors } A, B \text{ incompatibles implique } A, B \text{ dépendants.}}$
3. $\varnothing$ est indépendant de tout événement.
   C'est vrai ! Pour tout événement A, on a $\mathbf{P}(A \cap \varnothing) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$
   et d'autre part $\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(\varnothing) = 0 \times \mathbf{P}(A) = 0$, d'où l'égalité : $\mathbf{P}(A \cap \varnothing) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\varnothing)$.
4. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ implique A, B indépendants.
   par définition.
5. $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$ n'implique pas A, B, C mutuellement indépendants.
   Premier contre-exemple simple : on lance une pièce, on décrit l'univers $\Omega = \{pile, face\}$.
   On pose $A = \{pile\}$, $B = \{face\}$ et $C = \varnothing$.
   Alors d'une part : $A \cap B \cap C = \varnothing$ donc $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$,
   et d'autre part : $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$.
   Mais A, B ne sont pas indépendants : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$ alors que $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.
   On a utilisé ici l'événement $C = \varnothing$, ce que l'énoncé ne permet pas *a priori*.

   Deuxième contre-exemple, plus compliqué : on jette un dé. On décrit l'univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   On pose : $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 5, 6\}$.
   Alors $A \cap B \cap C = \{1\}$ donc $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{6}$ d'une part,
   et $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$ d'autre part, donc on a bien : $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.
   Mais on vérifie facilement qu'aucune paire d'événements parmi A, B, C n'est indépendante :
   $A \cap B = B$ donc $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, $\quad A \cap C = \{1\}$ donc $\mathbf{P}(A \cap C) = \dfrac{1}{6} \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) = \dfrac{1}{3}$,
   et $B \cap C = \{1\}$ donc $\mathbf{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{6} \neq \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \dfrac{1}{4}$.