Continuité

I Définition

1 Continuité, continuité à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de $\mathbf{R}$. Soit $x_0 \in D_f$ un point d'accumulation de D_f.

DÉFINITION

On dit que f est **continue en** x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Remarques :

- Lorsque f possède une limite ℓ en $x_0 \in D_f$, alors nécessairement $\ell = f(x_0)$.
- Si $x_0 \in D_f$ est un point d'accumulation à droite (*resp : à gauche*) de D_f, et si f admet pour limite $f(x_0)$ en x_0 à droite (*resp : à gauche*), alors on dit que f est **continue à droite en** x_0 (*resp : à gauche*).
- Si x_0 est un point isolé de D_f, on dit par convention que f est continue en x_0.
- Si $x_0 \in D_f$, et si f n'est pas continue en x_0, alors on dit que f est **discontinue** en x_0.

2 Continuité globale

DÉFINITION

Soit $D \subset D_f$ une partie de D_f.
On dit que f est **continue sur** D lorsque, pour tout $x_0 \in D$, f est continue en x_0.

On note $\mathcal{C}^0(D, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur D, à valeurs réelles.

3 Exemple des fonctions usuelles

Exemples des fonctions usuelles :

- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbf{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leurs ensembles de définition.
- Les fonctions exponentielles sont continues sur $\mathbf{R}$.
- Les fonctions logarithmes sont continues sur $\mathbf{R}_+^\star$.

- Les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$, sont continues sur leurs ensembles de définition.
- Les fonctions trigonométriques *sinus*, *cosinus* sont continues sur $\mathbf{R}$.
- La fonction *tangente* est continue sur son ensemble de définition.
- La fonction *valeur absolue* est continue sur $\mathbf{R}$.
- La fonction *partie entière* est continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, et est discontinue sur $\mathbf{Z}$.
- La fonction *indicatrice* de $\mathbf{Q}$ est discontinue sur $\mathbf{R}$.

4 Prolongement par continuité

DÉFINITION

Soit x_0 un point d'accumulation de D_f tel que $x_0 \notin D_f$.

S'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que la fonction $\tilde{f} : D_f \cup \{x_0\} \to \mathbf{R}$ est continue en x_0,

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ \ell \text{ si } x = x_0 \end{cases}$$

alors on dit que $\tilde{f}$ est un **prolongement continu** de f en x_0.

II Opérations sur les fonctions continues

1 Opérations usuelles

Pour justifier de la continuité d'une fonction en un point x_0 ou sur une partie $D \subset \mathbf{R}$, on pourra utiliser les règles opératoires suivantes, et indiquer pour toute justification : ≪ par opérations sur des fonctions continues ≫, ou ≪ par somme, produit, quotient ... de fonctions continues en x_0 ou sur D ≫.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 ou sur $D \subset \mathbf{R}$. Alors :

- $f + g$ est continue en x_0 (ou sur D),
- $f.g$ est continue en x_0 (ou sur D),
- si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors λf est continue en x_0 (ou sur D),
- si g ne s'annule pas en x_0 (ou sur D), alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en x_0 (ou sur D).

2 Composition

PROPRIÉTÉ

> Si f est continue en x_0, et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

3 Caractérisation de la continuité par les suites

Propriété

Soit f une fonction définie sur D_f, et soit $x_0 \in D_f$ un point d'accumulation de D_f. Alors : f est continue en x_0 si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_n$ convergente vers x_0, la suite $(f(u_n))_n$ converge. Dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

III Théorèmes des fonctions continues

1 Propriété de Bolzano-Weierstrass.

Propriété

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée.
> Alors (u_n) admet une suite extraite convergente.

2 Théorème des bornes

THÉORÈME

Soient $a < b$ deux réels, et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
Alors f est bornée sur $[a, b]$, et atteint ses bornes :

$$\exists c_1, c_2 \in [a, b], \forall x \in [a, b], \quad f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2)$$

3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème **T.V.I.**

Soit I un intervalle réel, et soit f une fonction continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle réel.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Formulation équivalente :

Si f est continue sur I, alors f atteint toute valeur strictement intermédiaire entre ses bornes inférieure et supérieure.

Remarques :

- Si I est un **segment**, alors les bornes sont également atteintes (c'est le théorème des bornes) :
  $\boxed{\textbf{l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.}}$
- Si I n'est pas un segment, le type d'intervalle n'est en général pas conservé, comme on le voit dans les exemples précédents, ou dans celui-ci :
  Soit $f : x \mapsto x^2$. Alors $f(]-1,1[) = [0,1[$.

Corollaire

Soient $a < b$ deux réels et f continue sur le segment $[a, b]$.
Si $f(a).f(b) < 0$, alors f s'annule sur $]a, b[$: $\exists c \in]a, b[, \quad f(c) = 0$.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I.
Alors f garde un signe constant sur I.

4 Théorème de la bijection continue

THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est strictement monotone}$$

Théorème

> Soit f une fonction monotone sur un intervalle I et telle que $f(I)$ est un intervalle.
> Alors f est continue sur I.

THÉORÈME

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors :

- f réalise une bijection de I sur $f(I)$, de bijection réciproque f^{-1},
- $f(I)$ est un intervalle de même *nature* que I (ouvert, fermé, semi-ouvert),
- Si I est d'extrémités $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, alors $f(I)$ est d'extrémités $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$,
- f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f,
- f^{-1} est continue sur $f(I)$.

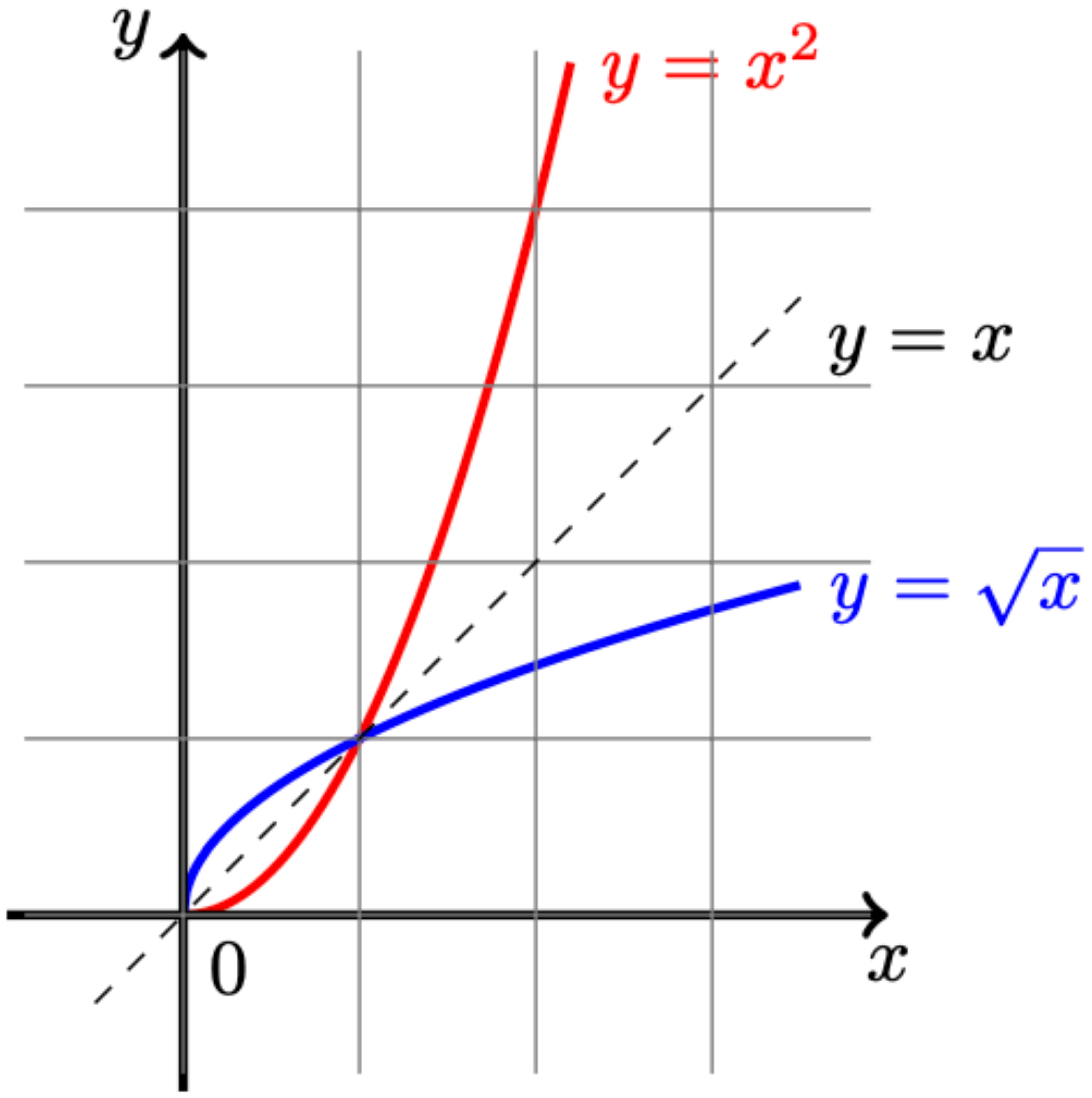
5 Bijections réciproques usuelles

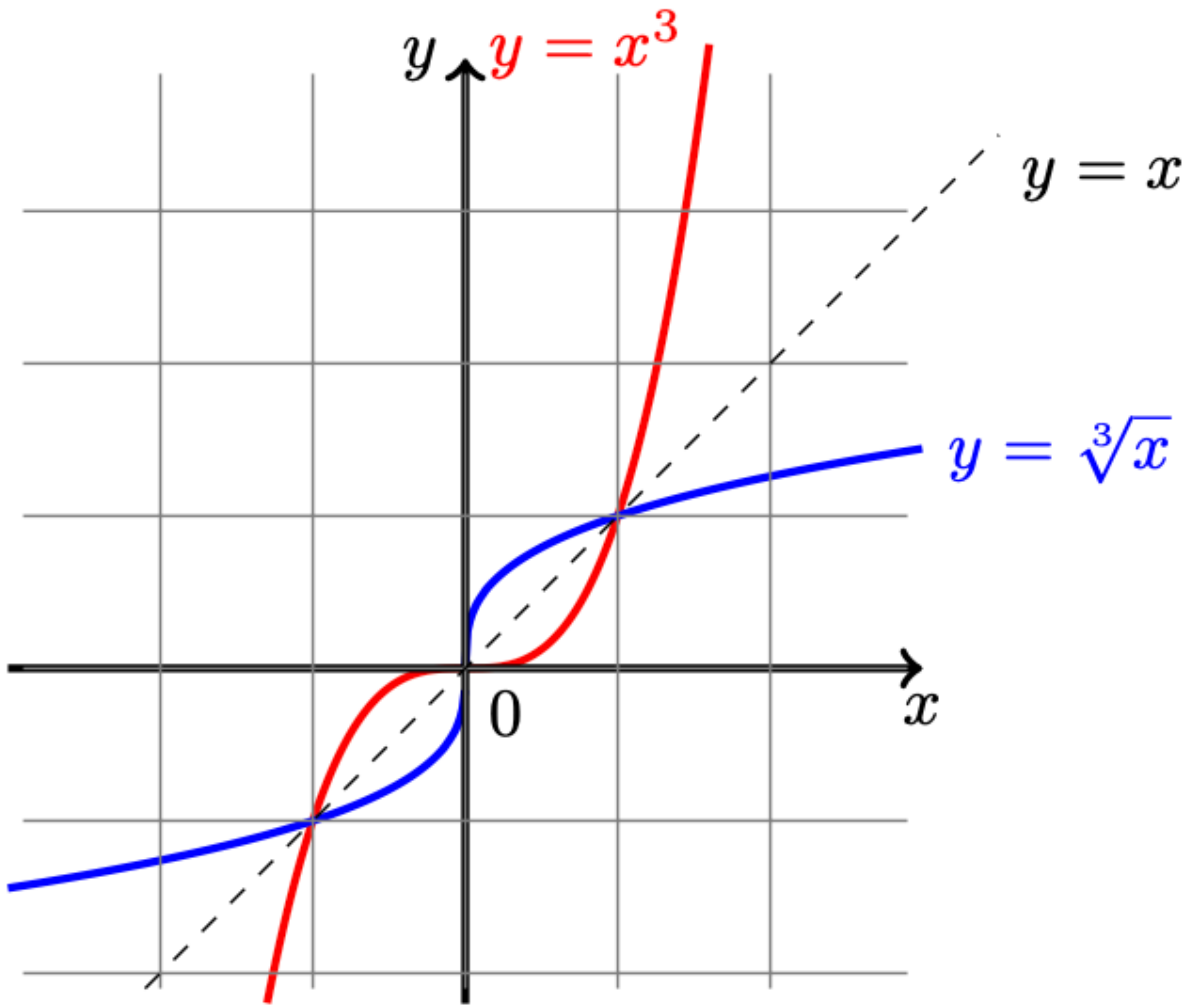
DÉFINITION

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. L'application $P_n : x \mapsto x^n$ définie sur $I = \mathbf{R}_+$ si n est pair et sur $I = \mathbf{R}$ si n est impair est continue et strictement croissante sur son ensemble de définition, qui est un intervalle.
En conséquence, P_n réalise une bijection de I dans $P_n(I)$.
On appelle **racine** $n^{\text{ième}}$ la bijection réciproque de P_n :

- si n est pair, $\begin{cases} \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{cases}$,
- si n est impair, $\begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{cases}$

Les applications $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sont donc continues et strictement croissantes sur leurs ensembles de définition.

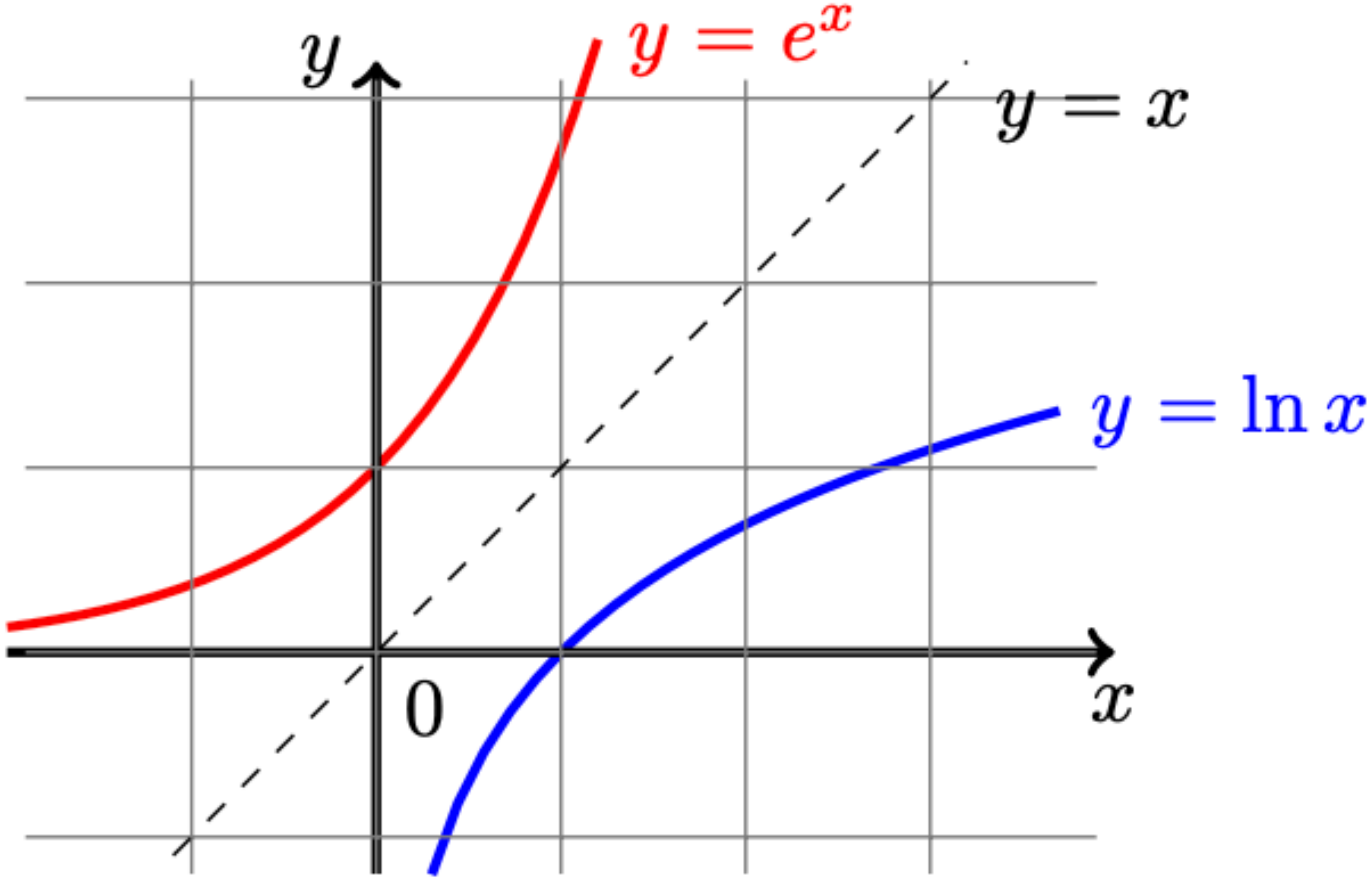

y
$y = x^2$
$y = x$
$y = \sqrt{x}$
0
x


y
$y = x^3$
$y = x$
$y = \sqrt[3]{x}$
0
x

Propriété

Les fonctions ln : $\mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$ et exp : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^\star$ sont des bijections continues et strictement croissantes réciproques l'une de l'autre.

Les fonctions ln et exp :



DÉFINITION

La fonction $f : x \mapsto \tan x$ définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante sur I.

Elle réalise donc une bijection de I sur $f(I) = \left]\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x, \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$.

Arctangente est la bijection réciproque de f. $\text{Arctan} : \mathbf{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante.

De même que tan, Arctan est impaire : $\forall x \in \mathbf{R},\ \text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}(x)$.

Les fonctions tan et Arctan :