I Définitions

1. Matrices réelles ou complexes
2. Matrices carrées, matrices lignes, matrices colonnes
3. Matrices triangulaires, matrices diagonales
4. Ensembles de matrices ($\to$ *Annexe*)
5. Matrices nulles, matrices identités

II Opérations sur les matrices

1. Produit externe
2. Somme matricielle
3. Combinaisons linéaires de matrices
4. Premières propriétés ($\to$ *Annexe*)
5. Produit matriciel
6. Propriétés du produit matriciel ($\to$ *Annexe*)
7. Puissances d'une matrice carrée ($\to$ *Annexe*)
8. Matrices inversibles ($\to$ *Annexe*)

III Matrices et systèmes linéaires

1. Écriture matricielle d'un système linéaire
2. Rang d'une matrice, cas des matrices inversibles ($\to$ *Annexe*)
3. Trois méthodes d'inversion d'une matrice
4. Cas des matrices 2×2 ($\to$ *Annexe*)

IV Matrices diagonales et matrices triangulaires

1. Opérations sur les matrices diagonales ($\to$ *Annexe*)
2. Opérations sur les matrices triangulaires ($\to$ *Annexe*)

V Transposition

1. Définition
2. Propriétés ($\to$ *Annexe*)
3. Matrices symétriques, antisymétriques

Annexes

$\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. n, p, q, r sont des entiers naturels non nuls.

1.4 Ensembles de matrices :

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.
$\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices carrées à n lignes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.
$D_n(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales à n lignes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.
$T_n^+(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à n lignes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.
$T_n^-(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures à n lignes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.

2.4 Propriétés de l'addition matricielle, et du produit externe : $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$

1. 1 est l'élément-neutre du produit externe : $1.A = A$
2. $0_{n,p}$ est l'élément-neutre de l'addition matricielle : $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$
3. La multiplication scalaire est associative : $\lambda.(\mu.A) = (\lambda\mu).A = \lambda\mu.A$
4. La somme matricielle est associative et commutative :
$$* \ (A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$$
$$* \ A+B = B+A$$
5. La multiplication par le scalaire 0 donne la matrice nulle : $0.A = 0_{n,p}$

2.6 Propriétés du produit matriciel : A, B, C sont des matrices de tailles convenables, et $\lambda \in \mathbf{K}$.

1. Le produit matriciel n'est pas commutatif : en général, $AB \neq BA$.
2. Il ne respecte pas la règle du produit de facteurs nul : $AB = 0_{n,p} \not\Rightarrow A = 0_{n,q}$ ou $B = 0_{q,p}$.
3. Les matrices nulles sont absorbantes : $A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$ et $0_{q,n} \times A = 0_{q,p}$.
4. Associativité : $A(BC) = (AB)C = ABC$.
5. Distributivité à droite : $A(B+C) = AB + AC$.
6. Distributivité à gauche : $(A+B)C = AC + BC$.
7. Associativité : $\lambda.(AB) = (\lambda.A)B = A(\lambda.B) = \lambda.AB$
8. Élément neutre : $I_n A = A I_p = A$.

2.7 Propriétés des puissances : A, B désignent des matrices carrées de même taille, et $\lambda \in \mathbf{K}$.

1. Distributivité sur le produit externe : $(\lambda.A)^p = \lambda^p.A^p$
2. Si $AB = BA$ (on dit alors que A et B **commutent**), alors :
   - $A^p \times B^q = B^q \times A^p$ (toute puissance de A commute avec toute puissance de B)
   - $(AB)^p = A^p B^p$ (distributivité sur le produit matriciel)
   - $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ (Formule du binôme de Newton)

2.8a Définition d'une matrice inversible :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique. On l'appelle **inverse** de la matrice A, et on la note : A^{-1}.

2.8b Propriétés de l'inverse :

1. I_n est inversible, et est son propre inverse : $(I_n)^{-1} = I_n$.
2. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible, et : $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Si A est inversible, alors pour tout entier naturel p, A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.
4. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont inversibles, alors AB est inversible, et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.2a Rang d'une matrice :

Le **rang** d'une matrice est le rang de tout système linéaire associé à cette matrice.

3.2a Matrice inversible :

Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si son rang vaut $r = n$.
Dans ce cas, l'unique solution de l'équation matricielle $AX = B$ est : $X = A^{-1}B$.
Un système de **Cramer** correspond à une matrice **inversible**.

3.4 Inversion d'une matrice 2×2 :

Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est : $\det(M) = ad - bc$.

M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

Dans ce cas, l'inverse de M est : $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

4.1 Matrices diagonales :

* L'ensemble $D_n(\mathbf{K})$ est stable par combinaisons linéaires :
$$\forall A, B \in D_n(\mathbf{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K},\ \lambda A + \mu B \in D_n(\mathbf{K}).$$
* L'ensemble $D_n(\mathbf{K})$ est stable par produit matriciel :
$$\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \times \mathrm{Diag}(b_1, \ldots, b_n) = \mathrm{Diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$$
* Les matrices diagonales commutent toutes entre elles.
* $\forall p \in \mathbf{N},\ \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)^p = \mathrm{Diag}(a_1^p, \ldots, a_n^p)$
* $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!], a_i \neq 0$,
  et dans ce cas : $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{a_1}, \ldots, \dfrac{1}{a_n}\right)$

4.2 Matrices triangulaires :

* L'ensemble $T_n^+(\mathbf{K})$ est stable par combinaisons linéaires :
$$\forall A, B \in T_n^+(\mathbf{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K},\ \lambda A + \mu B \in T_n^+(\mathbf{K}).$$
* L'ensemble $T_n^+(\mathbf{K})$ est stable par produit matriciel :
$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & * & * & * \\ 0 & b_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$
* $\forall p \in \mathbf{N}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & * & * & * \\ 0 & a_{22}^p & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}$.
* $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} \neq 0$,

  et dans ce cas : $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & * & * & * \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$
* Mêmes résultats pour $T_n^-(\mathbf{K})$.

5.2 Propriétés de la transposition : A, B sont des matrices de tailles convenables, et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$.

* ${}^t({}^tA) = A$
* ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$
* ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$
* $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$
* si A inversible, alors ${}^tA$ est inversible et : $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$