I Expérience aléatoire et univers

1. Univers
2. Événements
3. Système complet d'événements
4. Résumé de vocabulaire

II Probabilité

1. Espace probabilisé ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Propriétés des probabilités ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Construction d'une probabilité
4. Probabilité uniforme ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Probabilité conditionnelle

1. Définition ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Trois formules fondamentales ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Indépendance

1. Indépendance de deux événements ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Indépendance 2 à 2 de n événements ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Indépendance mutuelle (forte) de n événements ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

2.1 Espace probabilisé :

On considère un univers fini Ω.
On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- pour tous événements incompatibles A et B, on a $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

On appelle **espace probabilisé** tout couple $(\Omega, \mathbf{P})$ où Ω est un univers et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω.

2.2 Propriétés des probabilités :

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur un univers Ω fini. Soient A et B deux événements.

- $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$ — PROBABILITÉ DE L'ÉVÉNEMENT CONTRAIRE
- $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$ — PROBABILITÉ DE L'ÉVÉNEMENT IMPOSSIBLE
- $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \overline{B})$ — FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES
- Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.
- Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ — CROISSANCE DE LA PROBABILITÉ
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ — PROBABILITÉ DE LA RÉUNION
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements 2 à 2 incompatibles, alors : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$
- Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors : $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) = 1$

2.4 Formule d'équiprobabilité :

Soit Ω un univers fini, et $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Alors pour tout événement A,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

3.1 Probabilité conditionnelle :

Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$.

$\mathbf{P}_A : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \\ B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} \end{cases}$ est une probabilité sur Ω appelée **probabilité conditionnelle sachant** A.

La probabilité conditionnelle de B sachant A est notée $\mathbf{P}_A(B)$ ou encore $\mathbf{P}(B|A)$.

3.2 Formule des probabilités composées :

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.
$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ est une famille finie d'événements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors on a : $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$

3.3 Formule des probabilités totales :

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Soit un système complet d'événements $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$.

Alors, pour tout événement B, on a : $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B \cap A_i)$

Si de plus aucun des A_i n'a une probabilité nulle, alors : $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}_{A_i}(B)$

3.4 Formule de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A, B deux événements de probabilités non nulles. Alors :

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \times \mathbf{P}_A(B)$$

4.1 Indépendance de A et B : A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$

Lorsque $\mathbf{P}(A) \neq 0$, on a également : A, B indépendants $\Leftrightarrow \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$

4.2 Indépendance 2 à 2 :

$A_1, \cdots, A_n$ sont 2 **à** 2 **indépendants** lorsque $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \ i \neq j \Rightarrow \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}(A_j)$

4.3 Indépendance mutuelle :

$A_1, \cdots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** lorsque $\forall I \subset [\![1, n]\!],\quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$