I Limites en $\pm\infty$

1. Cadre
2. Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$ ($\to$ *Annexe*)
3. Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$ ($\to$ *Annexe*)
4. Cas des suites réelles

II Limites en un réel x_0

1. Point d'accumulation, voisinage
2. Limites finies ou infinies en x_0 ($\to$ *Annexe*)
3. Limites en x_0 à droite, à gauche

III Propriétés des limites

1. Unicité de la limite
2. Lien entre limite et limite à droite, à gauche
3. Limite finie et fonction bornée
4. Opérations sur les limites ($\to$ *Annexe*)
   a. Somme
   b. Produit par une constante
   c. Produit
   d. Inverse, quotient
   e. Composée
5. Extension des opérations ($\to$ *Annexe*)

IV Limites usuelles ($\to$ *Annexe*)

1. Fonctions usuelles
2. Croissances comparées

V Limites et relation d'ordre ($\to$ *Annexe*)

1. Passage à la limite dans une inégalité
2. Théorème de comparaison
3. Théorème d'encadrement (des gendarmes)

VI Fonctions monotones ($\to$ *Annexe*)

1. Théorème de la limite monotone en $\pm\infty$
2. Théorème de la limite monotone en x_0
3. Fonction monotone $]a,b[\longrightarrow \mathbf{R}$

VII Comparaison de fonctions ($\to$ *Annexe*)

1. Négligeabilité, prépondérance
2. Équivalence
3. Propriétés des relations de comparaison
4. Équivalents usuels en 0
5. Fonctions polynomiales ou rationnelles en $\pm\infty$ ou en 0

Annexes

1.2 Limite finie en $+\infty$: $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \geqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

1.3 Limite infinie en $+\infty$: $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbf{R},\ \exists \alpha \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \geqslant \alpha \Rightarrow f(x) > A$

2.2a Limite finie en x_0 : $\lim\limits_{x_0} f = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbf{R}_+^\star,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

2.2b Limite infinie en x_0 : $\lim\limits_{x_0} f = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbf{R},\ \exists \alpha \in \mathbf{R}_+^\star,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) > A$

3.4 Opérations sur les limites : $x_0 \in \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$*$ **Somme**

$\lim\limits_{x_0} f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x_0} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x_0}(f+g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

$*$ **Produit**

$\lim\limits_{x_0} f$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x_0} g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x_0}(f \times g)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty^{(*)}$	FI	$\pm\infty^{(*)}$

(*) *appliquer la règle des signes*

$*$ **Limite de λf, $\lambda \in \mathbf{R}$**

$\lim\limits_{x_0} f$	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$\lambda \in \mathbf{R}$	$\lambda \neq 0$	$\lambda = 0$
$\lim\limits_{x_0}(\lambda f)$	$\lambda\ell$	$\pm\infty^{(*)}$	0

$*$ **Inverse**

$\lim\limits_{x_0} f$	$\ell \neq 0$	0	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f}$	$\dfrac{1}{\ell}$	FI	$+\infty$	$-\infty$	0

$*$ **Composée de limites** : $x_0, x_1, \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, $\left(\lim\limits_{x_0} f = x_1 \text{ et } \lim\limits_{x_1} g = \ell\right) \Rightarrow \lim\limits_{x_0} g \circ f = \ell$

3.5 Extension des opérations sur les limites : $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$

- Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ et g minorée au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0}(f+g) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$ et g majorée au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0}(f+g) = -\infty$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = 0$ et g bornée au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = 0$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ et g minorée au voisinage de x_0 par $m > 0$, alors $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$ et g minorée au voisinage de x_0 par $m > 0$, alors $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = -\infty$

4.1 Fonctions puissances :

- $n \in \mathbf{N}^\star$ pair : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $n \in \mathbf{N}$ impair : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$
- $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

4.1 Fonctions exponentielles :

- $a > 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

4.1 Logarithme népérien : • $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

4.1 Tangente et Arctangente :

- $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^+} \tan = -\infty$
- $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} \tan = +\infty$
- $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{Arctan} = -\dfrac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{Arctan} = \dfrac{\pi}{2}$

4.1 Fonctions polynomiales ou rationnelles : En $\pm\infty$, les limites des fonctions polynomiales ou rationnelles sont celles de leur terme de plus haut degré (ou du quotient de leurs termes de plus haut degré).

4.6 Croissances comparées :

- $\forall \alpha, \beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$
- $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \forall \beta > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^{\beta x} = 0$

5.1 Passage à la limite : $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$, $\ell, \ell' \in \mathbf{R}$

Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$, $\lim\limits_{x_0} g = \ell'$, et $f \leqslant g$ ou $f < g$ sur un voisinage de x_0, alors $\ell \leqslant \ell'$.

5.2 Théorème de comparaison : $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$

Soient f, g telles que $f \leqslant g$ sur un voisinage de x_0. Alors $\begin{cases} \text{si } \lim\limits_{x_0} f = +\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x_0} g = +\infty \\ \text{si } \lim\limits_{x_0} g = -\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x_0} f = -\infty \end{cases}$

5.3 Théorème d'encadrement : $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$

Si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbf{R}$ et si $f \leqslant g \leqslant h$ sur un voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

6.1 Théorème de la limite monotone en $+\infty$:

Si f est croissante (*resp.* décroissante) sur un voisinage de $+\infty$, alors elle admet une limite en $+\infty$, réelle ou égale à $+\infty$ (*resp.* $-\infty$). Cette limite est infinie si f n'est pas majorée (*resp.* minorée), et finie sinon.

6.2 Théorème de la limite monotone en x_0 :

• Soit f une fonction croissante et soit x_0 est un point d'accumulation à gauche de D_f.
Alors f admet en x_0 une limite à gauche $\ell \in \mathbf{R}$ ou $+\infty$. Si de plus $x_0 \in D_f$, alors $\ell \in \mathbf{R}$ et $\ell \leqslant f(x_0)$.

• Soit f une fonction croissante et soit x_0 est un point d'accumulation à droite de D_f.
Alors f admet en x_0 une limite à droite $\ell \in \mathbf{R}$ ou $-\infty$. Si de plus $x_0 \in D_f$, alors $\ell \in \mathbf{R}$ et $\ell \geqslant f(x_0)$.

6.3 Fonction monotone sur $]a, b[$: Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ croissante, alors :

(*) si f est minorée, alors $\lim\limits_{a^+} f \in \mathbf{R}$ (*) si f est majorée, alors $\lim\limits_{b^-} f \in \mathbf{R}$

(*) si f est non minorée, alors $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$ (*) si f est non majorée, alors $\lim\limits_{b^-} f = +\infty$

7.1 Négligeabilité : $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$

f est négligeable devant g en x_0 signifie $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g} = 0$. On note : $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathrm{o}(g(x))$

7.2 Équivalence : $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$

f est équivalente à g en x_0 signifie $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g} = 1$. On note : $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$

7.3a Propriétés de la relation de négligeabilité $x_0 \in \overline{\mathbf{R}},\ \lambda \in \mathbf{R}^\star,\ \alpha > 0$

- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(\lambda g)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$ et $g \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h) \Rightarrow f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow f \times h \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g \times h)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$ et $h \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(k) \Rightarrow f \times h \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g \times k)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow f^\alpha \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g^\alpha)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow \dfrac{1}{g} \underset{x_0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{f}\right)$
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h)$ et $g \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h) \Rightarrow (f+g) \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h)$

7.3b Propriétés de la relation d'équivalence $x_0, x_1 \in \overline{\mathbf{R}},\ \alpha, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g) \ \Rightarrow\ (f+g) \underset{x_0}{\sim} g$
- $f \underset{x_0}{\sim} g \ \Leftrightarrow g \underset{x_0}{\sim} f$
- $f \underset{x_0}{\sim} g \ \Rightarrow \alpha f \underset{x_0}{\sim} \alpha g$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h \Rightarrow f \underset{x_0}{\sim} h$
- $f \underset{x_0}{\sim} g \ \Rightarrow f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k \Rightarrow f \times h \underset{x_0}{\sim} g \times k$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k \Rightarrow \dfrac{f}{h} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g}{k}$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x_1} \varphi = x_0 \Rightarrow f \circ \varphi \underset{x_1}{\sim} g \circ \varphi$.
- si $f \underset{x_0}{\sim} \lambda h$ et $g \underset{x_0}{\sim} \mu h$, alors $\begin{cases} \lambda + \mu \neq 0 \Rightarrow f + g \underset{x_0}{\sim} (\lambda + \mu) h \\ \lambda + \mu = 0 \Rightarrow f + g \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(h) \end{cases}$
- si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, alors $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

7.4 Équivalents usuels en 0

$\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$	$\tan x \underset{x \to 0}{\sim} x$	$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$
$\cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$	$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$	$\forall \alpha \in \mathbf{R},\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$

7.5 Équivalents pour les fonctions polynomiales ou rationnelles

• En $\pm\infty$, une fonction polynomiale (*resp.* rationnelle) est équivalente à son terme de plus haut degré (*resp.* au quotient de ses termes de plus haut degré).

• En 0, une fonction polynomiale (*resp.* rationnelle) est équivalente à son terme de plus bas degré (*resp.* au quotient de ses termes de plus bas degré).