Géométrie

I Vecteurs du plan et de l’espace

1 Définitions

DÉFINITION

Dans le plan $\mathcal{P}$ ou dans l'espace $\mathcal{E}$, un vecteur $\overrightarrow{u}$ est un élément géométrique défini par la donnée de :

- une direction,
- un sens,
- une longueur.

La longueur d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est aussi appelée la **norme** de $\overrightarrow{u}$, et notée $\|\overrightarrow{u}\|$. C'est un réel positif.
Un vecteur est **unitaire** lorsque sa norme vaut 1.

Le vecteur-nul $\overrightarrow{0}$ est le seul vecteur de norme 0. Il ne possède ni direction, ni sens.

Soient A, B deux points du plan ou de l'espace.

- Si $A \neq B$, alors $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur dont la direction est celle de la droite (AB), dont le sens est celui de A vers B, et dont la norme est la distance AB : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérise la **translation** dans laquelle B est l'image de A.
- Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

2 Produit externe, addition vectorielle

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace, soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

- **Produit externe**

  Si $\lambda \neq 0$, alors le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ est le vecteur de même direction que $\overrightarrow{u}$, de même sens que $\overrightarrow{u}$ si $\lambda > 0$ et de sens opposé si $\lambda < 0$, et de norme : $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|.\|\overrightarrow{u}\|$

  Si $\lambda = 0$, alors $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

- **Addition vectorielle**

  La somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est définie par la **relation de Chasles**.

Relation de Chasles :
Soient A, B, C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. Alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Définition

On appelle *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tout vecteur de la forme $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$, où λ et μ sont des réels.

3 Vecteurs colinéaires

DÉFINITION

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Deux vecteurs sont colinéaires lorsque l'un est le vecteur-nul, ou lorsqu'ils ont la **même direction**.
λ est parfois appelé le *coefficient de colinéarité* entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
<u>Le vecteur-nul est colinéaire à tout vecteur.</u>

4 Bases du plan ou de l'espace

THÉORÈME **Caractérisation d'une base du plan.**

Soient $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ deux vecteurs du plan.

Alors $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ forme une **base** du plan si et seulement si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ne sont pas colinéaires, si et seulement si $\forall a, b \in \mathbf{R},\ a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow a = b = 0$. Dans ce cas, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, il existe un <u>unique</u> couple de réels (x, y) tel que $\boxed{\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}}$.

(x, y) sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{u}(x, y)$.

THÉORÈME **Caractérisation d'une base de l'espace.**

Soient $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ trois vecteurs de l'espace.

Alors $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ forme une **base** de l'espace si et seulement si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{k}$ n'est colinéaire à aucune combinaison linéaire non nulle de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, si et seulement si $\forall a, b, c \in \mathbf{R},\ a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow a = b = c = 0$. Dans ce cas, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un <u>unique</u> triplet de réels (x, y, z) tel que $\boxed{\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}$.

(x, y, z) sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{u}(x, y, z)$.

Les coordonnées sont appelées *abscisse*, *ordonnée* et *cote* (ou *hauteur*).

A noter : dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a toujours $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

5 Repères du plan ou de l'espace

Définition

Soit O un point du plan ou de l'espace. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ ou $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base du plan ou de l'espace.
Alors $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un **repère** du plan ou de l'espace.
Tout point M du plan ou de l'espace est repéré par ses coordonnées (x, y) ou (x, y, z) égales aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$.
On parle de base ou repère **orthonormé(e)** lorsque les vecteurs de base sont unitaires et qu'ils forment deux-à-deux un angle droit.

6 Coordonnées et opérations

Tous les résultats énoncés ici sont valables dans le plan, si l'on omet la troisième coordonnée (la cote).

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

Alors : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$ et $\lambda\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$.

Propriété

Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ deux points de l'espace.

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

7 Déterminant de deux vecteurs du plan

Définition

Soient $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.

On appelle **déterminant** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

PROPRIÉTÉ **Critère de colinéarité dans le plan**

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

Propriété **Critère de colinéarité dans l'espace**

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ de l'espace sont colinéaires si, et seulement si :

$$\begin{cases} xy' - x'y = 0 \\ yz' - y'z = 0 \\ zx' - z'x = 0 \end{cases} \qquad \textit{ou encore :} \qquad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = 0$$

On dira que les déterminants extraits de rang 2 sont tous nuls.

II Produit scalaire

1 Définition

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace.
Le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le réel noté $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$$

$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est l'angle orienté formé par les vecteurs <u>non nuls</u> $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Si l'un des vecteurs est nul, on pose : $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

2 Caractérisation de l'orthogonalité

DÉFINITION

Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$$

Le vecteur-nul est orthogonal à tout vecteur.

3 Propriété du produit scalaire

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan ou de l'espace. Soient λ, μ des réels. Alors :

$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 \in \mathbf{R}_+$

$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$ *Le produit-scalaire est symétrique.*

$(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w}) + \mu(\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})$ *Le produit-scalaire est bilinéaire.*

$\overrightarrow{w} \bullet (\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{u}) + \mu(\overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{v})$

4 Produit-scalaire en base orthonormée

Soient $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ dans une base **orthonormée** $\mathcal{B}$.
Alors $\boxed{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$. En conséquence, $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Soient $A(x_a, y_a, z_a)$ et $B(x_b, y_b, z_b)$ deux points de l'espace rapporté à un repère **orthonormé**.
Alors la distance AB est : $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$

III Droites et cercles du plan

1 Représentation paramétrique d'une droite dans le plan

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$.

DÉFINITION

Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de **même direction** que $\mathcal{D}$ est appelé **vecteur-directeur** de $\mathcal{D}$.

Soient $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}(a,b)$ un vecteur-directeur de $\mathcal{D}$. Soit $M(x,y)$ un point du plan.

Alors $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x - x_A = \lambda a \\ y - y_A = \lambda b \end{cases}$

Ainsi, $\begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}$ est un **système d'équations paramétriques** représentant la droite $\mathcal{D}$.

À chaque valeur du paramètre λ correspond un point de $\mathcal{D}$, à chaque point de $\mathcal{D}$ correspond un réel λ.

2 Équation cartésienne d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$.

DÉFINITION

Tout vecteur $\overrightarrow{n}$ de **direction perpendiculaire** à $\mathcal{D}$ est appelé **vecteur-normal** à $\mathcal{D}$.

Dans un **repère orthonormé** du plan, soient $A(x_A, y_A) \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{n}(a, b)$ un vecteur-normal à $\mathcal{D}$.
Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}
\text{Alors } M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}, \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{n} = 0, \\
&\Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b = 0, \\
&\Leftrightarrow ax + by - (ax_A + by_A) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, toute droite du plan admet une **équation cartésienne** de la forme : $\boxed{ax + by + c = 0, \text{ où } a, b, c \in \mathbf{R}}$.

Propriété

Étant donnée une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ d'une droite $\mathcal{D}$ du plan,

- le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b)$ est un vecteur-normal à $\mathcal{D}$, dès que le repère est orthonormé,
- le vecteur $\overrightarrow{u}(-b, a)$ est un vecteur-directeur de $\mathcal{D}$, quel que soit le repère.

Définition

Soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ une droite du plan.
Si $b = 0$, alors $\mathcal{D}$ est verticale.
Sinon, $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ est **l'équation-réduite** de la droite $\mathcal{D}$.
Dans ce cas, $-\dfrac{a}{b}$ est le **coefficient-directeur** (ou *pente*) de la droite $\mathcal{D}$.

Propriété

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non verticales, de coefficient-directeurs respectifs m_1 et m_2. Alors :

- $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $m_1 = m_2$,
- dans un repère orthonormé, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 \times m_2 = -1$.

3 Distance d'un point à une droite

Soit M un point extérieur à une droite $\mathcal{D}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Alors la distance entre le point M et la droite $\mathcal{D}$ est : $d(M, \mathcal{D}) = HM$.

4 Cercles dans un plan

Dans tout ce paragraphe, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Cercle donné par son centre et son rayon

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ et de rayon $R \in \mathbf{R}_+^\star$. Soit $M(x, y)$ un point du plan.
Alors $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{(x-\omega_1)^2 + (y-\omega_2)^2 = R^2}$
On trouve ici l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Cercle donné par un diamètre

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts du plan. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
Alors $M(x,y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

IV Plans de l’espace

1 Généralités

Définition

Par trois points non alignés A, B, C de l'espace, il passe un unique plan $\mathcal{P}$, noté (ABC).
Si $\mathcal{D}$ est une droite du plan $\mathcal{P}$, et si $\overrightarrow{u}$ dirige $\mathcal{D}$, alors on dit aussi que $\overrightarrow{u}$ dirige $\mathcal{P}$, ou que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$.
Cependant, pour connaître l'inclinaison d'un plan, il faut connaître deux directions différentes de ce plan, soit deux vecteurs **non colinéaires** du plan.

Soit $A(x_a, y_a, z_a)$ un point de l'espace $\mathcal{E}$.
Soient $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

$$
\begin{aligned}
\text{Alors } M(x,y,z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire des vecteurs } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v}, \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \;\; \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_a = \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y - y_a = \lambda\beta + \mu\beta' \\ z - z_a = \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases} \quad \text{, où } (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.
\end{aligned}
$$

Tout plan admet donc un système d'équations paramétriques du type : $\begin{cases} x = x_a + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_a + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_a + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

À chaque couple (λ, μ) correspond un point du plan, à chaque point du plan correspond un couple (λ, μ).

3 Équation cartésienne d'un plan

On se place ici dans un repère orthonormé de l'espace.

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est **normal** à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Un plan est entièrement défini par un de ses points et un vecteur-normal non nul.
Soit $A(x_a, y_a, z_a)$ un point de l'espace. Soit $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur-normal $\overrightarrow{n}$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } M(x,y,z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{n} = 0,\\ &\Leftrightarrow a(x - x_a) + b(y - y_a) + c(z - z_a) = 0.\end{aligned}$$

Tout plan admet donc une équation cartésienne de la forme $\boxed{ax + by + cz + d = 0, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbf{R}}$.

4 Distance d'un point à un plan

Définition

Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, et M un point extérieur à $\mathcal{P}$.
Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est l'unique point $H \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{HM}$ est normal à $\mathcal{P}$.

PROPOSITION

La distance entre un point M et un plan $\mathcal{P}$ est : $d(M, \mathcal{P}) = HM$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

V Droites de l'espace

1 Position relative de deux droites

Définition

Deux droites contenues dans un même plan sont dites **coplanaires**.

Propriété

Deux droites de l'espace sont :

- ou bien **coplanaires**, et dans ce cas soit parallèles (strictement ou confondues), soit sécantes (en 1 point) ;
- ou bien **non coplanaires**.

2 Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace définie par un point $A(x_a, y_a, z_a)$ et par un vecteur-directeur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Alors $M(x,y,z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbf{R},\ \ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_a = \lambda\alpha \\ y - y_a = \lambda\beta \\ z - z_a = \lambda\gamma \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}.$

On obtient ainsi un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$.

3 Système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace

PROPRIÉTÉ

Deux plans de l'espace sont :

- ou bien parallèles (strictement, ou confondus) ;
- ou bien sécants, selon une droite.

On peut ainsi définir une droite de l'espace comme intersection de deux plans non parallèles.

PROPRIÉTÉ

> Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de vecteurs normaux non nuls respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
> Alors $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires.

Dans le cas contraire, la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ possède un système d'équations cartésiennes

$\mathcal{D} : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ où $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$ est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_i$.