Corrigé du Devoir Maison n°5

Exercice 1 : Puissances d'une matrice

1. Cas où $m = 1$

   $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc un calcul immédiat montre que $\boxed{(A_1)^2 = A_1.}$

   Par récurrence immédiate, on montre que : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ (A_1)^n = A_1.}$

2. Cas où $m \neq 1$

   a. A_m est une matrice triangulaire supérieure.
   Ses termes diagonaux sont tous non nuls car $1 - m \neq 0$.
   On en déduit que : $\boxed{\forall m \neq 1,\ A_m \text{ est inversible.}}$

   b. Par calcul : $(A_m)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2m - m^2 & 2m - m^2 \\ 0 & (1-m)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-m)^2 \end{pmatrix}$.
   On cherche des réels α et β tels que : $(A_m)^2 = \alpha.A_m + \beta.I$, où I est la matrice identité de taille 3.
   En identifiants les coefficients ligne 1 et colonne 1, on obtient : $1 = \alpha + \beta$.
   En identifiant les coefficients ligne 2 et colonne 2, on obtient : $(1-m)^2 = \alpha(1-m) + \beta$.
   On résout le système : $(S_m) \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ (1-m)\alpha + \beta = (1-m)^2 \end{cases}$
   Pour $m \neq 0$, on trouve : $\alpha = 2 - m$ et $\beta = m - 1$.
   On vérifie enfin par un calcul que : $\boxed{\forall m \in \mathbf{R},\ (A_m)^2 = (2-m)A_m + (m-1)I.}$

   c. La relation précédente permet d'écrire : $(A_m)^2 + (m-2)A_m = (m-1)I$
   donc en factorisant par A_m, on a : $A_m(A_m + (m-2)I) = (m-1)I$
   et finalement : $A_m\left(\dfrac{1}{m-1}A_m + \dfrac{m-2}{m-1}I\right) = I$ dès que $m \neq 1$. Cette relation prouve que,
   pour tout $m \neq 1$, A_m est inversible, et que : $\boxed{\forall m \neq 1,\ (A_m)^{-1} = \dfrac{1}{m-1}A_m + \dfrac{m-2}{m-1}I.}$

   d. On en déduit : $\forall m \neq 1,\ (A_m)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{m}{m-1} & \dfrac{m}{m-1} \\ 0 & \dfrac{1}{1-m} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-m} \end{pmatrix}$

3. a. On trouve après calcul : $\boxed{J^2 = -J.}$

   b. Par récurrence immédiate, on montre que : $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ J^k = (-1)^{k-1}J.}$

   c. On voit que : $\boxed{\forall m \in \mathbf{R},\ A_m = I + mJ.}$

   d. I et J sont deux matrices qui commutent ($IJ = JI = J$), donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer $(A_m)^n$:
   $(A_m)^n = (I + mJ)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (mJ)^k I^{n-k}$
   Or, pour tout $k \geqslant 1$, $(mJ)^k = m^k J^k = m^k(-1)^{k-1}J = -(-m)^k J$.
   Il vient donc : $(A_m)^n = \displaystyle\binom{n}{0}(mJ)^0 I^n - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-m)^k J$
   $$(A_m)^n = I - \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-m)^k\right)J$$
   et on reconnaît une somme de Newton diminuée de son premier terme :
   $(A_m)^n = I - ((1-m)^n - 1)\,J$ d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ (A_m)^n = I + (1 - (1-m)^n)\,J.}$

e. Pour $m \neq 1$, en remplaçant dans le membre de droite n par -1, on trouve $I + \left(1 - \dfrac{1}{1-m}\right) J$

soit la matrice $I + \dfrac{m}{m-1} J = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{m}{m-1} & \dfrac{m}{m-1} \\ 0 & 1 - \dfrac{m}{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{m}{m-1} \end{pmatrix}$

qui est précisément l'inverse de A_m. Autrement dit, sur cet exemple, la notation $(A_m)^{-1}$ de l'inverse de A_m généralise la formule donnant les puissances successives de A_m.

On peut alors obtenir l'inverse de $(A_m)^n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, en remplaçant n par $-n$ dans la formule de la question **3d** :

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'inverse de $(A_m)^n$ est : $\boxed{((A_m)^n)^{-1} = I + \left(1 - \dfrac{1}{(1-m)^n}\right) J.}$

On notera alors $(A_m)^{-n}$ cette inverse, et on peut résumer en indiquant que la formule de la question **3d** est encore valable pour $n \leqslant 0$:

$$\boxed{\forall m \neq 1, \forall n \in \mathbf{Z},\ (A_m)^n = I + (1 - (1-m)^n)\, J.}$$

Exercice 2 : Un problème de cartes

1. Tirer 5 cartes dans un jeu de 52 revient à constituer une partie de 5 éléments parmi un ensemble de 52 éléments. $\boxed{\text{Il y a } \binom{52}{5} \text{ tirages possibles.}}$
2. Un tirage contenant l'as de pique contient 4 autres cartes tirées parmi les 51 cartes restantes. Réaliser un tel tirage revient à tirer ces 4 autres cartes.
   $\boxed{\text{Il y a } \binom{51}{4} \text{ tirages contenant l'as de pique.}}$
3. Par équiprobabilité, la probabilité de gagner à ce jeu est $\dfrac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} = p$.
   $p = \dfrac{51 \times 50 \times 49 \times 48}{4 \times 3 \times 2} \times \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} = \dfrac{5}{52}$. $\boxed{\text{Il y a 5 chances sur 52 de gagner.}}$
4. $\boxed{\mathbf{P}_A(T) = 0}$: on ne peut pas gagner si l'as de pique a été enlevé.
5. Si l'as de pique n'a pas été enlevé : le jeu contient encore $52 - k$ cartes, dont l'as de pique.
   Par le même raisonnement qu'aux questions 1 à 3, on trouve donc : $\boxed{\mathbf{P}_{\overline{A}}(T) = \dfrac{5}{52-k}.}$
6. Subtiliser k cartes revient à former une partie à k éléments parmi un ensemble de 52 éléments. Il y a $\binom{52}{k}$ possibilités. Parmi ces possibilités, $\binom{51}{k-1}$ contiennent l'as de pique,
   donc la probabilité de subtiliser l'as de pique est $\boxed{\mathbf{P}(A) = \dfrac{\binom{51}{k-1}}{\binom{52}{k}} = \dfrac{k}{52}}$
7. $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
   D'après le formule des probabilités totales :
   $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(T \cap A) + \mathbf{P}(T \cap \overline{A}) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(T) + \mathbf{P}(\overline{A}) \times \mathbf{P}_{\overline{A}}(T)$
   $= 0 + \left(1 - \dfrac{k}{52}\right) \times \dfrac{5}{52-k} = \dfrac{5(52-k)}{52(52-k)}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(T) = \dfrac{5}{52}.}$
   Conclusion : inutile qu'Alice se tracasse ! Quel que soit le nombre de cartes subtilisées ($k \leqslant 47$), les chances de gagner pour Brice restent les mêmes.