# DS n°5, mathématique

*Durée : 3 heures*
*Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.*
*L'usage des calculatrices est interdit.*
*Le sujet comporte 3 pages, et se compose de 3 exercices indépendants.*

## Exercice 1 : Puissance de matrice

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

On étudie dans ce problème trois méthodes pour déterminer les puissances successives de la matrice $M$.

**Partie A** : Relation de récurrence

On pose $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$, où $I$ désigne la matrice-identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Expliciter les coefficients de $A$, puis calculer $A^2$.
2. Exprimer $M$ en fonction de $A$.
3. En déduire que : $M^2 = I - 8A$.
4. Montrer qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que : $\forall n \in \mathbf{N},\ M^n = I + u_n A$.
   Préciser les valeurs de $u_0, u_1$ et $u_2$.

On admet que : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = -3u_n + 4$.

5. Informatique : Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}$ renvoyant la liste $[u_0, u_1, \cdots, u_n]$.
6. Déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
7. En déduire, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $M^n$ en fonction de $I$ et $A$.

**Partie B** : Binôme de Newton

Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ la matrice telle que : $M = 4J - 3I$.

8. Préciser la matrice $J$.
9. Calculer $J^2$, et en déduire $J^k$ pour tout entier $k \geqslant 1$.
10. Justifier que $I$ et $J$ sont des matrices qui commutent.
11. Démontrer que : $\forall n \geqslant 0,\ M^n = (-3)^n I + \big(1 - (-3)^n\big) J$.

**Partie C** : Diagonalisation

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

12. Montrer que $P$ est inversible, et déterminer son inverse $P^{-1}$.
13. On pose : $D = P^{-1}MP$. Calculer $D$.
14. Que dire de la matrice $D$ ? En déduire $D^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
15. Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ M^n = PD^nP^{-1}$.
16. Déterminer, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $M^n$.
17. Soit $R$ une combinaison linéaire de $I$ et de $M$.
    Montrer que $P^{-1}RP$ est une matrice diagonale.

## Exercice 2 : Dénombrement

On dispose d'un panier contenant 20 boules discernables numérotées de 1 à 20. Les boules de 1 à 5 sont vertes, les boules de 6 à 10 sont rouges et les boules restantes sont noires.

1. Dans cette question, on tire *simultanément* du panier 5 boules.
   On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des tirages contenant au moins une noire et $\mathcal{T}_r$ l'ensemble des tirages contenant au moins une rouge.
   (a) Combien y a-t-il de tirages au total ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages contenant exactement deux boules vertes ?
   (c) Quel est le cardinal de $\mathcal{T}_n$ ?
   (d) Dénombrer l'ensemble $\mathcal{T}_n \cup \mathcal{T}_r$.
   (e) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une boule noire et au moins une boule rouge.
2. On dispose en plus du panier de trois boîtes marquées $A$, $B$, $C$ respectivement. On répartit la totalité des 20 boules dans ces trois boîtes (on autorise les configurations laissant une ou deux boîtes vides).
   (a) Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de répartitions telles que toutes les boules vertes soient dans une même boîte (cette boîte pouvant éventuellement accueillir d'autres boules) ?
   (c) Combien de répartitions ne laissent aucune boîte vide ?

## Exercice 3 : Probabilité

Soit une urne contenant $p$ boules vertes et $q$ blanches avec $p$ et $q$ deux entiers tels que $q \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$.
On considère un jeu consistant à piocher des boules successivement et sans remise, et on s'arrête lorsqu'on a sorti deux boules blanches (pas forcément à suivre). On gagne 5 € par boule verte obtenue.
Pour $k \in [\![1\,;p+q]\!]$ on définit les évènements :

$B_k$ : « la $k^{\text{e}}$ boule tirée est blanche ».
$T_k$ : « On a tiré $k$ boules pendant la partie ».

Pour les questions 1 à 4 on utilise $p = 3$ et $q = 7$.

1. Donner la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules blanches
   (c'est à dire la probabilité de gagner 0 €).
2. (a) Si on a joué une partie et gagné 5 €, combien a-t-on tiré de boules en tout ?
   (b) Justifier que, d'après les règles, la dernière boule tirée ne peut être verte.
   (c) Donner la probabilité que les deux premières boules piochées soient de couleurs différentes.
   (d) En déduire que la probabilité de gagner 5 € est de $\frac{7}{20}$.
3. Donner la probabilité de gagner au moins 10 €, on notera $E$ cet évènement.
4. Donner la probabilité que la première boule tirée soit blanche sachant qu'on a gagné au moins 10 € (c-à-d la probabilité de $B_1$ sachant $E$).

Pour les questions suivantes on considère le cas général, $p$ et $q$ sont deux entiers avec $q \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$ mais leurs valeurs ne sont pas connues. Pour $k \in [\![1\,;p+q]\!]$ on définit les évènements :

$Z_k$ : « Parmi les $k$ premières boules tirées aucune n'est blanche ».
$U_k$ : « Parmi les $k$ premières boules tirées exactement une est blanche ».
$W_k$ : « La partie s'est terminée en tirant au plus $k$ boules ».

On notera $z_k$ la probabilité de $Z_k$ et $u_k$ la probabilité de $U_k$.

5. Justifier, pour $k \in [\![2\,;p]\!]$, que $(Z_k, U_k, W_k)$ est un système complet d'évènements ou partition de l'univers. Montrer de même que $(Z_1, U_1)$ est un système complet d'évènements.

6. (a) Montrer que pour $k \in [\![1\,;p]\!]$ on a la relation : $z_{k+1} = \dfrac{p-k}{p+q-k} z_k$.

   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![1\,;p+q]\!], \quad z_k = \begin{cases} \dfrac{p!(p+q-k)!}{(p+q)!(p-k)!} & \text{si } k \leqslant p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   <u>*indication :*</u> *On pourra justifier que $Z_k$ est impossible pour $k > p$ et montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété :*

$$H_k : \quad k \leqslant p \;\Rightarrow\; z_k = \frac{p!(p+q-k)!}{(p+q)!(p-k)!}.$$

7. (a) Montrer que pour $k \in [\![1;\, p+1]\!]$ on a : $u_{k+1} = \dfrac{q}{p+q-k} z_k + \dfrac{p-k+1}{p+q-k} u_k$.

   (b) En déduire que :

$$\forall k \in [\![1\,;p+q]\!], \quad u_k = \begin{cases} \dfrac{qk(p!)(p+q-k)!}{(p+q)!(p+1-k)!} & \text{si } k \leqslant p+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. En déduire, pour $k \in [\![2\,;p+2]\!]$, la probabilité de $T_k$, c'est-à-dire la probabilité de gagner $5(k-2)$€.