Corrigé du DS n°5

Exercice 1 : Suites récurrentes imbriquées

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Partie A : Relation de récurrence

On pose $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$, où I désigne la matrice-identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. $\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ donc après calcul : $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$. On remarque que : $\boxed{A^2 = -A.}$
2. $\boxed{M = 4A + I.}$
3. A et I commutent, donc $M^2 = 16A^2 + 8AI + I^2 = 16(-A) + 8A + I$. Ainsi, $\boxed{M^2 = I - 8A.}$
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: « $\exists u_n \in \mathbf{R},\ M^n = I + u_n A$ ».
   $\star$ Premières valeurs de (u_n) :
   $M^0 = I$ donc $\boxed{u_0 = 0}$, $M^1 = I + 4A$ donc $\boxed{u_1 = 4}$ et $M^2 = I - 8A$ donc $\boxed{u_2 = -8.}$
   $\star$ Preuve de $\mathcal{P}_n$ par récurrence :
   • Ce qui précède montre que $\mathcal{P}_0$ est vraie (ainsi que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$).
   • Soit $n \geqslant 0$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.
   Alors $M^{n+1} = MM^n = M(I + u_n A) = (4A + I)(I + u_n A) = 4u_n A^2 + (4 + u_n)A + I$.
   Mais $A^2 = -A$, donc $M^{n+1} = I + (4 - 3u_n)A$. Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et $\boxed{u_{n+1} = 4 - 3u_n}$.
   • D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
5. Informatique :
```
def SUITE(n) :
    u, L = 0, [0]
    for _ in range(n) :
        u = 4 - 3*u
        L.append(u)
    return L
```
6. $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = -3u_n + 4$ donc la suite (u_n) est arithmético-géométrique.
   On pose : $\ell = -3\ell + 4$, on trouve $\ell = 1$. La suite $v_n = u_n - 1$ est géométrique de raison -3 :
   $\forall n \geqslant 0,\ v_n = v_0(-3)^n = (u_0 - 1)(-3)^n = -(-3)^n$. Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = v_n + \ell = 1 - (-3)^n.}$
7. On en déduit que : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ M^n = I + \big(1 - (-3)^n\big)A.}$

Partie B : Binôme de Newton

Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ la matrice telle que : $M = 4J - 3I$.

8. $J = \dfrac{1}{4}(M + 3I)$ et on trouve : $\boxed{J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.
9. On trouve après calculs : $\boxed{J^2 = J}$ donc par une récurrence immédiate : $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ J^k = J.}$
10. $IJ = JI = J$ car I est la matrice-identité, donc $\boxed{I \text{ et } J \text{ commutent.}}$
11. On peut appliquer le binôme de Newton : $\forall n \geqslant 0,\ M^n = (4J - 3I)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3I)^{n-k}$
    $\forall n \geqslant 0,\ M^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J + (-3I)^n$ (en isolant le terme pour $k = 0$).
    On calcule $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - (-3)^n = (4-3)^n - (-3)^n = 1 - (-3)^n$.

Ainsi : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ M^n = \big(1-(-3)^n\big)J + (-3)^n I.}$

Partie C : Diagonalisation On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

12. $(P\,|\,I) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

On obtient 3 pivots, donc $\mathrm{rg}(P) = 3$ et $\boxed{P \text{ est inversible.}}$

$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

13. On pose $D = P^{-1}MP$. On trouve après calculs : $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$.

14. $\boxed{D \text{ est diagonale}}$, donc on en déduit que $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}}$.

15. On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $M^n = PD^nP^{-1}$ ».
   ⋆ Initialisation au rang $n = 0$: $M^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   ⋆ Hérédité à partir du rang $n = 0$: soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.
   Alors $M^{n+1} = MM^n = M(PD^nP^{-1})$. Mais $D = P^{-1}MP$ donc $M = PDP^{-1}$.
   En remplaçant, on a : $M^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   ⋆ Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$: $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ M^n = PD^nP^{-1}.}$

16. On calcule $M^n = PD^nP^{-1}$: $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ M^n = \begin{pmatrix} -1+2\times(-3)^n & 0 & -2+2\times(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix}}$.

17. Soit R une combinaison linéaire de I et de M. Alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que : $R = \lambda I + \mu M$.
   On a donc $P^{-1}RP = P^{-1}(\lambda I + \mu M)P = \lambda P^{-1}IP + \mu P^{-1}MP = \lambda I + \mu D$
   On trouve une combinaison linéaire de matrices diagonales, donc $\boxed{P^{-1}RP \text{ est une matrice diagonale.}}$

Exercice 2 : Dénombrement

1. (a) Nombre de tirages possibles :
   Un tirage est une partie à 5 éléments parmi les 20 boules. $\boxed{\text{Il y a } \binom{20}{5} \text{ tirages possibles.}}$

   (b) Tirages avec exactement deux boules vertes :
   Pour constituer un tel tirage, il faut successivement :
   - choisir une paire de boules vertes parmi les 5 boules vertes : $\binom{5}{2}$ choix.
   - choisir 3 boules parmi les $20-5=15$ non vertes : $\binom{15}{3}$ choix.

   $\boxed{\text{Il y a } \binom{5}{2} \times \binom{15}{3} \text{ tirages avec exactement 2 boules vertes.}}$

   (c) Tirages avec au moins une noire :
   On dénombre le nombre de tirages ne contenant pas de noire. Il faut alors choisir 5 boules parmi les 10 non noires : $\binom{10}{5}$ choix. Par passage au complémentaire : $\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{T}_n) = \binom{20}{5} - \binom{10}{5}}$.

   (d) Tirages avec au moins une noire ou au moins une rouge :

Comme à la question précédente, on s'intéresse au complémentaire de $\mathcal{T}_n \cup \mathcal{T}_r$: il s'agit de l'ensemble des tirages ne contenant ni boule noire, ni boule rouge. Ils sont alors constitués uniquement de boules vertes. Puisqu'on dispose de 5 boules vertes, et qu'on pioche 5 boules, il y a exactement 1 tirage ne contenant que des boules vertes.

Ainsi, $\text{card}\left(\overline{\mathcal{T}_n \cup \mathcal{T}_r}\right) = 1$ donc $\boxed{\text{card}\left(\mathcal{T}_n \cup \mathcal{T}_r\right) = \binom{20}{5} - 1.}$

(e) <u>Tirages avec au moins une noire et au moins une rouge :</u>
Dans cette question, on demande $\text{card}(\mathcal{T}_n \cap \mathcal{T}_r)$.
Or, on sait que : $\text{card}(\mathcal{T}_n \cup \mathcal{T}_r) = \text{card}(\mathcal{T}_n) + \text{card}(\mathcal{T}_r) - \text{card}(\mathcal{T}_n \cap \mathcal{T}_r)$
Donc $\text{card}(\mathcal{T}_n \cap \mathcal{T}_r) = \text{card}(\mathcal{T}_n) + \text{card}(\mathcal{T}_r) - \text{card}(\mathcal{T}_n \cup \mathcal{T}_r) = \binom{20}{5} - \binom{10}{5} + \binom{20}{5} - \binom{15}{5} - \binom{20}{5} + 1$

$$\boxed{\text{Il y a } \binom{20}{5} - \binom{10}{5} - \binom{15}{5} + 1 \text{ tirages avec au moins une noire et au moins une rouge.}}$$

2. (a) <u>Nombre de répartitions possibles :</u>
Une répartition est une 20-liste de l'ensemble à 3 éléments $\{A, B, C\}$: pour chaque boule, on choisit dans quelle boîte la ranger (liste ordonnée avec répétitions). $\boxed{\text{Il y a } 3^{20} \text{ répartitions possibles.}}$

(b) <u>Toutes les vertes dans une même boîte :</u>
Pour réaliser une telle répartition, il faut successivement choisir :
- la boîte contenant toutes les vertes : 3 choix.
- la boîte pour chacune des 15 autres boules i.e une 15−liste de l'ensemble à 3 éléments $\{A, B, C\}$: 3^{15} choix.

$$\boxed{\text{Il y a } 3 \times 3^{15} = 3^{16} \text{ répartitions où toutes les boules vertes sont dans la même boîte.}}$$

(c) <u>Aucune boîte vide :</u> Dénombrons ici le complementaire.
- il n'y a aucune répartition laissant 3 boîtes vides.
- il y a 3 répartitions laissant 2 boîtes vides (choix de la boîte contenant toutes les boules).
- il y a $3 \times (2^{20} - 2)$ répartitions laissant exactement 1 boîte vide :
  - choix de la boîte vide (3 choix).
  - nombre de 20-listes de l'ensemble à 2 éléments restant possibles, auquel on retire 2, le nombre de répartitions où une seule boîte est remplie.

Il y a donc : $3 + 3 \times (2^{20} - 2) = 3 \times (2^{20} - 1)$ répartitions laissant au moins une boîte vide.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \text{Il y a } 3^{20} - 3 \times (2^{20} - 1) \text{ répartitions ne laissant aucune boîte vide.}}$

Exercice 3 : Probabilités

1. D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \boxed{\frac{7}{15}}.$$

2. (a) Si on a gagné 5€ on a tiré exactement une boule verte et 2 blanches soit <u>3 boules</u>.
(b) On s'arrête dès qu'on a tiré une deuxième boule blanche, c'est nécessairement la dernière boule tirée.
(c) Par réunion disjointe et d'après les probabilités composées (on peut aussi utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(B_1, \overline{B_1})$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \boxed{\frac{7}{15}}.\end{aligned}$$

(d) En notant A l'évènement de la question précédente, la probabilité de gagner 5€ sera d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(T_3) = \mathbb{P}(A \cap B_3) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B_3) = \frac{7}{15} \times \frac{6}{8} = \frac{7}{20}.$$

3. Par complémentaire, c'est la probabilité de ne pas gagner 0 ou 5 euros : $\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{7}{15} - \frac{7}{20} = \boxed{\frac{11}{60}}.$

4. Si la première boule est blanche et que l'on gagne au moins 10 € alors les deux boules suivantes sont vertes et $E \cap B_1 = B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$. Ainsi, d'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}_E(B_1) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8}}{\frac{11}{60}} = \boxed{\frac{7}{22}}.$$

5. Si la partie ne s'est pas terminée en au plus k tirages alors il y a au plus 1 boule blanche parmi les k premières boules tirées (et donc soit une, soit aucune). Ces 3 évènements sont donc non vides, deux à deux disjoints et leur réunion est l'univers Ω de l'expérience.

6. (a) Soit $k \in [\![1\,;p]\!]$. Il est clair que $\mathbb{P}_{U_k}(Z_{k+1}) = 0$ car si Z_{k+1} se produit alors il ne peut y avoir aucune boule blanche parmi les k premières boules et de même, pour $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}_{W_k}(Z_{k+1}) = 0$. D'après la formule des probabilités totales on a donc :

$$\mathbb{P}(Z_k)\mathbb{P}_{Z_k}(Z_{k+1}) = z_k \mathbb{P}_{Z_k}(\overline{B_{k+1}})$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1;\, p]\!], \quad z_{k+1} = \frac{p-k}{p+q-k} z_k.}$$

En effet, il restera bien $p-k$ boules vertes parmi $p+q-k$ boules lors du $k+1$^e tirage.

(b) Puisqu'il n'y a que p boules vertes et que les tirages s'effectuent sans remise, tout tirage de k boules avec $k > p$ comporte au moins une boule blanche et Z_k est impossible pour $k > p$.

On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$H_k : \quad k \leqslant p \ \Rightarrow\ z_k = \frac{p!(p+q-k)!}{(p+q)!(p-k)!}.$$

initialisation : On a $p \geqslant 1$ et $z_1 = \mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{p}{p+q}$.

hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose H_k et on montre H_{k+1}. Si $k+1 \leqslant p$ alors $k \leqslant p$ et on peut utiliser la formule pour z_k ainsi que la relation de la question précédente :

$$z_{k+1} = \frac{p-k}{p+q-k} z_k = \frac{p-k}{p+q-k}\,\frac{p!(p+q-k)!}{(p+q)!(p-k)!} = \frac{p!(p+q-(k+1))!}{(p+q)!(p-(k+1))!}$$

On peut donc conclure que : $\boxed{\forall k \in [\![1\,;p+q]\!], \quad z_k = \begin{cases} \dfrac{p!(p+q-k)!}{(p+q)!(p-k)!} & \text{si } k \leqslant p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

7. (a) On aura $U_{k+1} = (Z_k \cap B_{k+1}) \cup (U_k \cap \overline{B_{k+1}})$ (on pourra aussi utiliser la formule des probabilités totales en notant que Z_{p+1} est impossible) et donc :

$$\mathbb{P}(U_{k+1}) = \mathbb{P}(Z_k)\mathbb{P}_{Z_k}(B_{k+1}) + \mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}_{U_k}(\overline{B_{k+1}})$$

$$\boxed{u_{k+1} = \frac{q}{p+q-k} z_k + \frac{p-k+1}{p+q-k} u_k.}$$

En effet, si on a tiré k boules vertes, il restera q boules blanches sur les $p+q-k$ boules restantes au $k+1$^e tirage. Si on a tiré $k-1$ vertes et une blanche il restera $p-k+1$ vertes.

(b) Un tirage de k boules avec $k \geqslant p+2$ comporte au moins 2 boules blanches et U_k est impossible pour $k > p+1$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$H_k : \quad k \leqslant p+1 \ \Rightarrow\ u_k = \frac{qk(p!)(p+q-k)!}{(p+q)!(p+1-k)!}.$$

initialisation : On a $p+1 \geqslant 1$ et $u_1 = \mathbb{P}(B_1) = \frac{q}{p+q}$.

hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose H_k et on montre H_{k+1}. Si $k+1 \leqslant p+1$ alors $k \leqslant p+1$ et on peut utiliser la formule pour u_k ainsi que la relation de la question précédente :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{q}{p+q-k} z_k + \frac{p-k+1}{p+q-k} u_k \\ &= \frac{q}{p+q-k}\,\frac{p!(p+q-k)!}{(p+q)!(p-k)!} + \frac{p-k+1}{p+q-k}\,\frac{qk(p!)(p+q-k)!}{(p+q)!(p+1-k)!} \\ &= \frac{q(k+1)}{p+q-k}\,\frac{p!(p+q-k)!}{(p+q)!(p-k)!} = \frac{q(k+1)(p!)(p+q-(k+1))!}{(p+q)!(p+1-(k+1))!} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que : $\boxed{\forall k \in [\![1\,;p+q]\!], \quad u_k = \begin{cases} \dfrac{qk(p!)(p+q-k)!}{(p+q)!(p+1-k)!} & \text{si } k \leqslant p+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

8. Soit $k \in [\![2\,;p+2]\!]$. La probabilité de T_k est la probabilité de $U_{k-1} \cap B_k$, soit d'après les probabilités composées :

$$\mathbb{P}(T_k) = \frac{q(k-1)(p!)(p+q+1-k)!}{(p+q)!(p+2-k)!}\,\frac{q-1}{p+q+1-k}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![2\,;p+2]\!], \quad \mathbb{P}(T_k) = \frac{q(q-1)(k-1)(p!)(p+q-k)!}{(p+q)!(p+2-k)!}.}$$