Espaces vectoriels

I Définition et exemples

1 Axiomes des espaces vectoriels

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition

Soient E un ensemble, $+ : E \times E \to E$ une *addition* dans E et $. : \mathbf{K} \times E \to E$ un *produit externe*.
Alors le triplet $(E, +, .)$ est un **K-espace vectoriel** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

Propriétés de l'addition :

- L'addition dans E est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3, \ \ (x+y)+z = x+(y+z)$
- E contient un **élément-neutre** noté 0_E vérifiant : $\forall x \in E, \ \ x + 0_E = 0_E + x = x$
- Tout élément x de E possède un **symétrique** : $\forall x \in E, \exists y \in E, \ \ x + y = y + x = 0_E$
- L'addition dans E est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2, \ \ x + y = y + x$

Propriétés du produit externe :

- 1 est l'**élément-neutre** du produit externe : $\forall x \in E, \ \ 1.x = x$
- Distributivité sur l'addition vectorielle : $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (x,y) \in E^2, \ \ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
- Distributivité sur l'addition scalaire : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall x \in E, \ \ (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- Associativité : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall x \in E, \ \ (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$

2 Vecteurs géométriques

On note alors : $(E, +, .)$ est un $\mathbf{K}$-ev, ou encore : E est un $\mathbf{K}$-ev (les lois $+$ et . sont alors sous-entendues).
Les éléments de E sont appelés les **vecteurs** de E, les éléments de $\mathbf{K}$ sont les **scalaires**.
Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on dit aussi que E est un *espace vectoriel réel* ; si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on parle d'*espace vectoriel complexe*.
L'élément-neutre 0_E est aussi appelé le **vecteur-nul**.
Le symétrique d'un élément $x \in E$ est noté $-x$.

3 L'ensemble $\mathbf{K}^n$

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

Pour deux n-upplets $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ éléments de $\mathbf{K}^n$, et pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on pose :

- $x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \in \mathbf{K}^n$
- $\lambda.x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \in \mathbf{K}^n$

Alors $\boxed{(\mathbf{K}^n, +, .) \text{ est un } \mathbf{K}\text{-ev.}}$

4 Autres exemples d'espaces vectoriels

a Ensemble des suites réelles ou complexes

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ l'ensemble des suites réelles.
Pour deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}},\ \ v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ et pour un réel λ, on pose :

- $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$
- $\lambda.u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

Alors $\boxed{(E, +, .) \text{ est un } \mathbf{R}\text{-ev.}}$

b Ensemble de polynômes

L'addition de deux polynômes et la multiplication d'un polynôme par une constante munissent $\mathbf{R}[X]$ ou $\mathbf{C}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

c Ensemble des applications de R dans R

$E = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ muni de l'addition de deux applications, et du produit d'une application par un réel est un espace vectoriel réel.

5 Calculs dans un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel, on utilisera les règles de calcul suivantes, valables pour tous scalaires λ, μ et tous vecteurs x, y :

- $x - y = x + (-y)$
- $\lambda.0_E = 0_E$
- $\lambda(-y) = -\lambda.y$
- $\lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$
- $0.x = 0_E$
- $(-\mu).x = -\mu.x$
- $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$
- $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

II Sous-espaces vectoriels

1 Combinaisons linéaires

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ des scalaires.

Définition

$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i$ est un vecteur appelé **combinaison linéaire** des $(x_1, \cdots, x_n)$.

2 Définition d'un sous espace vectoriel

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-ev et soit F une partie de E.

Définition

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- F est non vide : $F \neq \varnothing$
- F est *stable* par toute combinaison linéaire : $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad \lambda.x + \mu.y \in F$

On note : F **s-ev** de E.

3 Exemples

- E est un s-ev de E, et $\{0_E\}$ est un s-ev de E.

  Ce sont les sous-espaces vectoriels de E appelés « triviaux ».

- Soit $x \in E, x \neq 0_E$. Alors $\{\lambda.x, \ \ \lambda \in \mathbf{K}\}$ est un s-ev de E, noté $\mathbf{K}.x$ ou $\mathrm{Vect}(x)$.

  On parlera de droite vectorielle engendrée par x.

- Soit $E = \mathbf{R}^2$. Alors $F = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \ 2x - y = 0\right\}$ est un s-ev de $\mathbf{R}^2$.
  On reconnaît l'équation d'une doite dans le plan, passant par l'origine du repère.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $\mathbf{K}_n[X]$ est un s-ev de $\mathbf{K}[X]$.
- Soit $E = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
  Alors $F = \{f \in E,\ \ f(2713) = 0\}$ est un s-ev de E.

4 Intersection sous espaces vectoriels

PROPRIÉTÉ

Soient F_1 et F_2 deux s-ev d'un même espace vectoriel E.
Alors $F_1 \cap F_2$ est encore un s-ev de E.

Remarque : Cette propriété se généralise à toute intersection de sous-espaces vectoriels.

5 Sous-espace vectoriel engendré

Définition

Soit E un $\mathbf{K}$-ev et soit $P \subset E$ une partie non vide de E.
Alors l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de P est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(P)$, et appelé **sous-espace vectoriel engendré** par P.

Propriété

Soit F un s-ev de E et soit P une partie non vide de E.
Alors $\mathrm{Vect}(F) = F$; et si F contient P, alors F contient $\mathrm{Vect}(P)$.

III Familles particulières de vecteurs

1 Famille génératrice

Définition

Soit E un $\mathbf{K}$-ev, et soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E.
Alors on dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est **génératrice** si $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n) = E$.

On retient qu'une famille est génératrice si tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i$$

Remarque : Toute famille de laquelle on peut extraire une famille génératrice est encore génératrice.

DÉFINITION

Soit $F \subset E$ un s-ev. Alors $(x_1, \cdots, x_n)$ est **génératrice de** F si $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n) = F$.
On dit aussi que $(x_1, \cdots, x_n)$ *engendre* F.

2 Famille liée, famille libre

DÉFINITION

Soit E un **K**-ev, et soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E.
Alors on dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est **liée** s'il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ dans **K**, **non tous nuls**, tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i = 0_E$

Remarques :

- Une famille qui contient le vecteur nul 0_E est toujours liée.

- Si, à une famille liée, on ajoute des vecteurs, alors on obtient encore une famille liée.
- La famille (x, y) est liée signifie que x et y sont colinéaires.
- Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille liée. Alors l'un (au moins) des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres :
$$\exists k \in [\![1, n]\!], \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \quad x_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i . x_i$$

Définition

Soit E un $\mathbf{K}$-ev, et soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E.
Alors on dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est **libre** si elle n'est pas liée.

Dans ce cas, $\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 0.$

Remarque : Si la famille formée par les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ est libre, on dit que ces vecteurs sont **linéairement indépendants**.

3 Base

DÉFINITION

Soit E un $\mathbf{K}$-ev, et soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E ($n \geqslant 1$).
Alors on dit que la famille $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une **base** de E si elle est **libre et génératrice**.
Dans ce cas, tout vecteur de E s'écrit **de façon unique** comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$:

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \ \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i$$

Les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème (admis)

Soit E un $\mathbf{K}$-ev non réduit à $\{0_E\}$. Alors E possède (au moins) une base $\mathcal{B}$.

Définition

Soit F un s-ev d'un espace vectoriel E. On dit qu'une famille d'éléments de F est une **base de** F si elle est libre et si elle engendre F.

IV Dimension

1 Espace vectoriel de base finie

DÉFINITION

Soit E un $\mathbf{K}$-ev possédant une base $\mathcal{B}$ de cardinal fini $n \in \mathbf{N}^{\star}$.
Alors pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, $\mathcal{B}'$ est finie et de cardinal n.
Le cardinal commun à toute base de E s'appelle la **dimension** de E, notée : $\dim E$.

Remarque : Par convention, on dira que $E = \{0_E\}$ est de dimension 0.

Propriété

Si E est un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbf{N}$, alors tout s-ev F de E est aussi de dimension finie, et on a : $\dim F \leqslant \dim E$.

Si $F \neq E$, alors on a : $\dim F < \dim E$. On parle alors de sous-espace vectoriel *strict*.

2 Cardinaux de familles libres, génératrices

Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie n.

Propriété

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :

- si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est de cardinal $p \leqslant n$, et dans ce cas on peut compléter la famille $\mathcal{F}$ en une base de E ;
- $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n si et seulement si c'est une base de E ;

- si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est de cardinal $p \geqslant n$, et dans ce cas on peut en extraire une base de E ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice et de cardinal n si et seulement si c'est une base de E.

PROPOSITION

Une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbf{K}_n[X]$ tous de degrés distincts est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Remarque 1 : ce n'est pas une condition nécessaire.

Remarque 2 : la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ est :

3 Dimension de sous-espaces vectoriels

Propriété

Soient E et F des s-ev de $\mathbf{K}^n$. Alors E et F sont de dimensions finies et :

- si $E \subset F$, alors $\dim E \leqslant \dim F$;
- si $E \subset F$ et $\dim E = \dim F$, alors $E = F$.

4 Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie n.

DÉFINITION

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors on appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$ la dimension r du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. On note : $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$.

Propriété

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de cardinal p d'un espace vectoriel E de dimension n.
On note $r = \mathrm{rg}(\mathcal{F})$ le rang de la famille $\mathcal{F}$. Alors :

- $r \leqslant p \quad \text{et} \quad r \leqslant n\,;$
- $r = n$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est génératrice, et dans ce cas $p \geqslant n\,;$
- $r = p$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est libre, et dans ce cas $p \leqslant n\,;$
- $r = p = n$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

V Aspect matriciel

1 Matrice d'un vecteur relativement à une base

On se place ici dans le cas où $E = \mathbf{K}^n$ avec $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base de $\mathbf{K}^n$.

$*$ Soit v un vecteur de $\mathbf{K}^n$. Il s'écrit alors (de façon unique) : $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$,
où les $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.

Alors on dit que la matrice-colonne $C = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est la **matrice du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$**, et on note $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

$*$ Soit $(v_1, \cdots, v_p)$ un p-uplet de vecteurs de $\mathbf{K}^n$.
Alors on appelle **matrice des vecteurs** $v_1, \cdots, v_p$ **dans la base** $\mathcal{B}$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p) = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{p,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{p,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{p,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(v_{i,1}, \cdots, v_{i,n})$ sont les coordonnées du vecteur v_i dans la base $\mathcal{B}$.
Si on note $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$, on peut écrire : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

2 Rang d'une famille de vecteurs

Propriété

> Le rang d'une famille de vecteurs égale le rang de la matrice de ces vecteurs dans une base $\mathcal{B}$.

3 Matrices d'une base

$\boxed{\text{Une famille } \mathcal{F} \text{ de } n \text{ vecteurs de } \mathbf{K}^n \text{ forme une base de } \mathbf{K}^n \text{ si et seulement si } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est inversible.}}$

Remarque : ces deux propriétés ne dépendent pas de la base $\mathcal{B}$ considérée au départ !
Dans la plupart des exemples, la base $\mathcal{B}$ sera la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{K}^n$.

4 Matrice de passage

DÉFINITION

Soient $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (u'_1, \cdots, u'_n)$ deux bases de $\mathbf{K}^n$. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u'_1, \cdots, u'_n)$.

Alors on dit que P est la **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$**, et on note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Propriété

Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ sont trois bases de $\mathbf{K}^n$, alors :

$$(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$$

5 Changement de bases

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbf{K}^n$. Soit v un vecteur de $\mathbf{K}^n$.
v possède des coordonnées $(v_1, \cdots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, et $(v'_1, \cdots, v'_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
Soient $C = Mat_{\mathcal{B}}(v)$ et $C' = Mat_{\mathcal{B}'}(v)$ les matrice-colonnes correspondantes.

On a alors : $\boxed{C = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times C'}$ Formule de changement de bases

Remarque : On obtient les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.
Si on veut connaître C' en fonction de C, on écrit : $C' = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} \times C = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \times C$