Exercice 1 : Vrai / Faux

1. **FAUX**. Contre-exemple : la fonction f définie par : $f(x) = 0$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$ admet en 0 des limites à gauche et à droite qui sont identiques. Elle n'est cependant pas continue en 0.
   Pour que cela soit vrai, il faut de plus que les limites à droite et à gauche en a soient égales à $f(a)$.
2. **FAUX**. En effet, $\lim\limits_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1 \neq \lfloor 0 \rfloor$.
3. **VRAI**.
   Preuve : puisque f est continue en a : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
   Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on peut poser $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2} > 0$:
   $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \dfrac{f(a)}{2}$.
   Mais $|f(x) - f(a)| < \dfrac{f(a)}{2}$ signifie $\dfrac{f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(a)}{2}$ donc en particulier : $f(x) > 0$.
   On a donc : $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > 0$, ce qui est la propriété annoncée.
4. **FAUX**. Contre-exemple : la fonction h définie sur l'intervalle borné $]0,1]$ par : $h(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas bornée. Pour que cela soit vrai, il faut que l'intervalle $\mathcal{D}_f$ soit un segment $[a,b]$: c'est alors le **théorème des bornes** qui s'applique.

Exercice 2 : Rendre une fonction continue

$*$ Par opérations, f est continue sur $\left]-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\cup]\pi, +\infty[$.

$*$ En $\dfrac{\pi}{2}$:

Par opérations, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = a$, et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2} = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ainsi, f est continue en $\dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si $a = \dfrac{\pi}{2}$.

$*$ En π : $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = 0 = f(\pi)$, et $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \dfrac{\pi^2}{2} + b$.

Ainsi, f est continue en π si et seulement si $0 = \dfrac{\pi^2}{2} + b$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R} \text{ si et seulement si } a = \dfrac{\pi}{2} \text{ et } b = -\dfrac{\pi^2}{2}.}$

Exercice 3 : Étude de continuité

La fonction partie entière est continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, donc par opérations, f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
Soit $n \in \mathbf{Z}$ un entier relatif. Étude de la continuité de f en n :
D'une part : $\lim\limits_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ et $\lim\limits_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$.
D'autre part : $\lim\limits_{x\to n} \sin(\pi x) = \sin(n\pi) = 0$.
Donc par opérations, $\lim\limits_{x\to n} f(x) = 0 = f(n)$. Ainsi, f est continue en n.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

Exercice 4 : Un prolongement par continuité

1. <u>Domaine de définition de f</u> :
   f est définie en x tel que : $\begin{cases} x + 4 \geqslant 0 \\ \sqrt{x+4} - 2 \neq 0 \end{cases}$ Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_f = [-4, 0[\cup]0, +\infty[.}$
2. Par opérations, $\boxed{f \text{ est continue sur son ensemble de définition.}}$
3. <u>Prolongement continu en 0</u> :
   Il s'agit de voir si f admet en 0 des limites à droite et à gauche qui sont finies et égales entre elles.
   D'une part, $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$.

D'autre part, $\sqrt{x+4}-2=\sqrt{4(1+\frac{x}{4})}-2=2\sqrt{1+\frac{x}{4}}-2=2\left(\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)$.

Par équivalent usuel, $\sqrt{x+4}-2\underset{0}{\sim}2\times\frac{1}{2}\times\frac{x}{4}=\frac{x}{4}$.

Ainsi, par quotient d'équivalents : $f(x)\underset{0}{\sim}\frac{2x}{\frac{x}{4}}=8$, donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=8$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ se prolonge en posant } f(0)=8 \text{ en une fonction continue sur } [-4,+\infty[.}$

Exercice 5 : Une relation fonctionnelle

1. Expression de f en $\frac{x}{2^n}$:

   Soit $n\in\mathbf{N}$. Soit $\mathcal{P}_n$: « $f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(x)$. »

   $*$ Initialisation pour $n=0$: $\frac{x}{2^0}=x$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   $*$ Hérédité à parir de $n=0$:

   Soit $n\geqslant0$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors $f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f\left(2\times\frac{x}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ par propriété de f, donc $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=f(x)$ d'après $\mathcal{P}_n$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   $*$ $\mathcal{P}_n$ est initialisée et héréditaire à partir de $n=0$.

   D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n\geqslant0$. $\boxed{\forall n\geqslant0,\ f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(x).}$

2. f est constante sur $\mathbf{R}$.

   Soit x un réel. Alors la suite $\left(\frac{x}{2^n}\right)_{n\geqslant0}$ converge vers 0 (suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$).

   Par continuité de la fonction f, la suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_n$ converge vers $f(0)$.

   Mais d'après la question 1, cette suite est constante, égale à $f(x)$.

   Par unicité de la limite, on a : $f(x)=f(0)$.

   Conclusion : $\boxed{\forall x\in\mathbf{R},\ f(x)=f(0), \text{ donc } f \text{ est une fonction constante.}}$

Exercice 6 : Un théorème "du point fixe"

Posons $g:x\mapsto f(x)-x$, définie pour $x\in[a,b]$.
Par opérations, g est continue sur $[a,b]$.
Puisque $f([a,b])\subset[a,b]$, alors $f(a)\in[a,b]$ et $f(b)\in[a,b]$, donc : $a\leqslant f(a)\leqslant b$ et $a\leqslant f(b)\leqslant b$.
On en déduit que : $g(a)=f(a)-a\geqslant0$ et que $g(b)=f(b)-b\leqslant0$.
D'après le premier corollaire du TVI, appliqué à la fonction g continue sur l'intervalle $[a,b]$, la fonction g possède au moins une racine sur $[a,b]$:
il existe $c\in[a,b]$, $g(c)=0$, donc $\boxed{\text{il existe } c\in[a,b],\ f(c)=c.}$

Remarque : un tel nombre c s'appelle un "point fixe" de la fonction f.

Exercice 7 : Un théorème "du point fixe" (2)

f est continue sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème des bornes, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe $c_1,c_2\in[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$, $m=f(c_1)\leqslant f(x)\leqslant f(c_2)=M$.

$*$ Premier cas (pas intéressant du tout) : $c_1=c_2$.
On remarque que $c_1=c_2$ implique que $m=M$ donc que f est constante (égale à M par exemple).
$[a,b]\subset f([a,b])$ devient alors $[a,b]\subset\{M\}$, donc $a=b=M$ et f n'est définie qu'en un point M, qui vérifie bien $f(M)=M$.

$*$ Deuxième cas : $c_1<c_2$.
Posons $g:x\mapsto f(x)-x$, définie pour $x\in[c_1,c_2]$.
Par opérations, g est continue sur $[c_1,c_2]$.
Alors $g(c_1)=m-c_1$ avec $m\leqslant a\leqslant c_1$, donc $g(c_1)\leqslant0$.
De plus, $g(c_2)=M-c_2$ avec $c_2\leqslant b\leqslant M$, donc $g(c_2)\geqslant0$.

On peut appliquer le premier corollaire du TVI à la fonction g continue sur $[c_1, c_2]$:
il existe $c \in [c_1, c_2]$ tel que $g(c) = 0$, donc tel que $f(c) = c$.

$*$ Troisième cas : $c_1 > c_2$. Même raisonnement, mais sur le segment $[c_2, c_1]$.

Dans tous les cas, $\boxed{\text{il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } f(c) = c.}$

Exercice 8 : Un théorème "du point fixe" (3)

Posons $h : x \mapsto f(x) - g(x)$, définie pour $x \in [a,b]$.
Alors h est continue par opérations sur $[a,b]$.
On a de plus : $h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(b)$, et $h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a)$. Donc $h(a) = -h(b)$.
Ainsi, $h(a).h(b) \leqslant 0$. On applique le premier corollaire du TVI à la fonction h sur l'intervalle $[a,b]$:
il existe $c \in [a,b]$ tel que $h(c) = 0$, donc $\boxed{\text{il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } f(c) = g(c).}$

Exercice 9 : Une application du TVI

Par opérations, g est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

On a de plus : $g(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 90 - f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

$*$ Premier cas : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant 45$. Alors on a : $g(0) \leqslant 45$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 45$.

$*$ Deuxième cas : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) > 45$. Alors on a : $g(0) > 45$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) < 45$.

Dans tous les cas, 45 est une valeur intermédiaire : $45 \in g\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right)$.

g étant continue sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, d'après le TVI, il existe $c \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tel que $g(c) = 45$.

Conclusion : il existe toujours $c \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tel que $g(c) = c$.

Pour ce réel c, pendant l'intervalle de temps $\left[c, c + \dfrac{1}{2}\right]$, le véhicule a parcouru exactement 45 km.

Exercice 10 : Une fonction bornée

Notons $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$. Par définition, et en choisissant $\varepsilon = 1 > 0$, on a :
$\exists \alpha,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1.$ Ainsi : $\forall x \in]\alpha, +\infty[,\ \ell - 1 < f(x) < \ell + 1.$
Sur le segment $[0, \alpha]$, la fonction f est continue. D'après le théorème des bornes, elle y est bornée.
Ainsi : $\exists m, M,\ \forall x \in [0, \alpha],\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Posons $m' = \min\{m, \ell - 1\}$ et $M' = \max\{M, \ell + 1\}$.
Alors pour tout réel x : $m' \leqslant f(x) \leqslant M'$, ce qui montre que $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbf{R}_+.}$

Exercice 11 : Étude de fonction

1. f est définie en x tel que : $\begin{cases} 1 + x \neq 0 \\ \dfrac{1-x}{1+x} > 0 \end{cases}$.

   On étudie le signe de $\dfrac{1-x}{1+x}$, et on trouve : $\boxed{\mathcal{D}_f =]-1, 1[.}$

2. $\mathcal{D}_f$ est centré.

   Soit $x \in \mathcal{D}_f$. Alors $f(-x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$.

   Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$

3. f est dérivable (donc continue) par opérations sur $\mathcal{D}_f$, et on a :

   $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-2}{(1-x)(1+x)} = -\dfrac{1}{(1-x)(1+x)} < 0.$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathcal{D}_f$.
De plus, $\lim\limits_{-1^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{1^-} f = -\infty$ par opérations.
f est <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur l'<u>intervalle</u> $\mathcal{D}_f$.
D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathcal{D}_f \text{ dans } f(\mathcal{D}_f) = \mathbf{R}.}$

4. Soit $y \in \mathbf{R}$. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$.

Remarque : d'après ce qui précède, on sait déjà que cette équation possède une unique solution dans $]-1,1[$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^{2y} \Leftrightarrow 1-x = (1+x)e^{2y} \Leftrightarrow (e^{2y}+1)x = 1 - e^{2y}$$

Donc $\boxed{f^{-1} : \mathbf{R} \to]-1,1[\text{ a pour expression : } \forall y \in \mathbf{R},\ f^{-1}(y) = \frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}}}$

Exercice 12 : Suite définie de façon implicite

1. f est dérivable (donc continue) sur $\mathbf{R}$. Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$.
De plus, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ par règles sur les fonctions polynomiales.
f est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbf{R}$.
D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.
Ainsi, pour tout réel y, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution réelle.
En particulier si $y = n$, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^\star,\ (E_n) \text{ admet une unique solution.}}$

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$.
Puisque f est strictement croissante, on en déduit que $x_n < x_{n+1}$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante.}}$
On sait donc que : ou bien (x_n) converge vers $\ell \in \mathbf{R}$, ou bien (x_n) diverge vers $+\infty$.
Si (x_n) converge vers $\ell \in \mathbf{R}$, alors par continuité de f, $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$.
Mais $f(x_n) = n$ donc $(f(x_n))$ diverge vers $+\infty$.
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$

3. Pour tout $n \geqslant 1, x_n^5 + x_n + 1 = n$. Mais $x_n \to +\infty$, donc $x_n + 1 \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x_n^5)$.
Ainsi, $x_n^5 + x_n + 1 \underset{+\infty}{\sim} x_n^5$, donc $x_n^5 \underset{+\infty}{\sim} n$.
On compose par la puissance $\alpha = \dfrac{1}{5}$: $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{5}}.}$

Remarque : on ne sait pas calculer directement les valeurs de la suite (x_n).

Exercice 13 : Suite définie de façon implicite (2)

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. La fonction f_n est dérivable (donc continue) sur $[0,1]$.
On a : $\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.
De plus, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n - 1 \geqslant 0$.
f_n est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0,1]$.
D'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[-1, n-1]$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \text{ l'équation } f_n(x) = 0 \text{ possède une unique solution dans } [0,1].}$

2. $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + f_n(u_n) = u_n^{n+1}$ car $f_n(u_n) = 0$ par définition de u_n.
Puisque $u_n \in [0,1]$, on a $u_n^{n+1} \geqslant 0$, donc $f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$.
Puisque f_{n+1} est croissante, on en déduit que $u_n \geqslant u_{n+1}$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$
Puisqu'elle est minorée par 0, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell \geqslant 0.}$

3. Soit $n \geqslant 2$. Alors $f_n(1) = n - 1 \geqslant 1 \neq 0$, donc $u_n \neq 1$.

   On peut donc calculer la somme géométrique : $f_n(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n^k - 2 = \frac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n} - 2$.

   Par ailleurs, $f_n(u_n) = 0$, donc : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \dfrac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n} = 2.}$

   La suite (u_n) étant décroissante, on a : $\forall n \geqslant 2, u_n \leqslant u_2$, donc $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant u_n^{n+1} \leqslant u_2^{n+1}.}$

   On sait calculer u_2, qui est l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

   On trouve $u_2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ et on vérifie que $0 \leqslant u_2 < 1$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_2^{n+1} = 0$ (résultat des suites géométriques de raison $-1 < q < 1$.)

   D'après l'encadré précédent, et d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{n+1} = 0$.

   Par passage à la limite dans le premier encadré, on obtient : $\dfrac{1}{1 - \ell} = 2$, donc $\boxed{\ell = \dfrac{1}{2}.}$