Devoir Maison n°6

Une suite de fonctions

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} x\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et on notera $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Partie I : Étude des fonction f_n

1. a. Justifier que f_n est continue sur $\mathbf{R}^\star$.
   b. Montrer que f_n est continue à droite en 0. Que dire de $\lim\limits_{x\to 0^-} f_n(x)$?
   c. Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de f_n.
2. Montrer que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f_n(x) - (x-n)) = 0$.
   On rappelle que cela implique que la droite Δ_n d'équation $y = x - n$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_n$ en $+\infty$ et en $-\infty$. On ne demande pas d'étudier la position relative de $\mathcal{C}_n$ et de cette asymptote.
3. Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ et montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}^\star,\ f_n'(x) = \left(1+\dfrac{n}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right)$
4. Dresser le tableau de variations complet de f_n.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_n$ sur la feuille réponse (page 4 de ce sujet).

Partie II : Étude d'une suite implicite

6. Montrer que pour tout entier n strictement positif, l'équation d'inconnue réelle x
   $$(E_n) \quad f_n(x) = 1$$
   admet une unique solution, notée u_n dans la suite.
7. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ u_n > 1$.
8. a. Calculer pour tout réel non nul x le quotient $\dfrac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}$.
   b. En déduire que : $\forall n \geqslant 1,\ f_n(u_{n+1}) = \exp\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$.
   c. En déduire la monotonie de la suite (u_n).
9. Soit g la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $g(x) = x\ln(x)$.
   a. Montrer que la fonction g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
   b. Rappeler les propriétés de sa bijection réciproque g^{-1}. Donner le tableau de variations de g^{-1}.
10. Montrer que x est solution de (E_n) si et seulement si x est solution de l'équation : $g(x) = n$.
11. Retrouver le sens de variations de la suite (u_n).
12. a. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
    b. Montrer que $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$ et donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\ln(u_n)$.
    c. Trouver un équivalent simple de u_n en $+\infty$.

Partie III : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f_1

On considère la suite (x_n) définie par :
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = f_1(x_n) \end{cases}$$

13. a. Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ f_1(x) \in [0,1]$.
    b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $x_n \in [0,1]$.
14. Montrer que si (x_n) est convergente, alors sa limite est nulle.
15. a. Montrer que pour tout réel $x \in [0,1],\ f_1(x) \leqslant x$.
    b. En déduire la monotonie de la suite (x_n).
16. Conclure quant à la nature de la suite (x_n).
17. Écrire en langage *Python* une fonction `SUITE` d'argument un entier N qui renvoie la liste $[x_0, x_1, \ldots, x_N]$.
18. Proposer une fonction `INDICE` d'argument `epsilon` renvoyant le premier indice n tel que $x_n < \varepsilon$.