Dérivation

I Rappels et compléments sur la dérivée

1 Dérivée, dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit D une partie de $\mathbf{R}$, et $f : D \to \mathbf{R}$.

- Soit $x_0 \in D$. On dit que f est **dérivable** en x_0 lorsque le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$ admet une limite **finie** lorsque h tend vers 0.

  La limite est alors appelée **nombre dérivé de f en x_0** et notée $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Si le taux d'accroissement admet une limite finie *à droite* en x_0, on dit que f est **dérivable à droite** en x_0 et on note : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
- Si le taux d'accroissement admet une limite finie *à gauche* en x_0, on dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 et on note : $f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Remarques :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ équivaut à : } \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } x_0, \\ f \text{ est dérivable à gauche en } x_0, \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0). \end{cases}$$

Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

2 Lien avec la continuité

$\boxed{\text{Si } f \text{ est dérivable en } x_0\text{, alors } f \text{ est continue en } x_0 \text{ et } f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0)+h.f'(x_0)+\mathrm{o}(h).}$

3 Fonction dérivée, notations

Définition

On dit que f est **dérivable** sur D lorsque f est dérivable en tout point de D.

On définit alors la fonction dérivée f' de f par $f' : \begin{cases} D \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$

On rencontre les notations : $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \cdots$ La dérivée temporelle peut se noter $\dot{f}$

4 Lien avec les tangentes

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet en x_0 une **tangente non verticale**. Dans ce cas, le **coefficient-directeur de la tangente** en x_0 est $f'(x_0)$.
f est dérivable à droite en x_0 (*resp :* à gauche) si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet à droite (*resp :* à gauche) en x_0 une **demi-tangente**.

PROPOSITION

Soit f dérivable en x_0, soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0.
La **tangente à $\mathcal{C}_f$ en** A admet pour équation : $\quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

5 Cas de non dérivabilité

Tangentes verticales : Le taux d'accroissement de f admet en x_0 (à gauche ou à droite) une limite infinie si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en x_0 (à gauche ou à droite) une (demi-)tangente **verticale**.
Exemples : Études en 0 de $x \mapsto \sqrt{|x|}$ et de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

II Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle réel I, et soit λ un réel.

1 Somme

La fonction somme $u + v$ est dérivable sur I, et $(u + v)' = u' + v'$.

2 Produit externe

La fonction produit de u par λ est dérivable sur I, et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

3 Produit

La fonction produit de u par v est dérivable sur I, et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

4 Inverse, quotient

Si la fonction v ne s'annule pas sur I, alors :

1. la fonction inverse de v est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
2. la fonction quotient de u par v est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

5 Composée

Soient $f : I \longrightarrow J$, et $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables.
Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

6 Réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ dérivable et bijective, de bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$.

Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$, mais on peut dire que la courbe représentative de f^{-1} admet en y_0 une tangente (ou demi-tangente) verticale.

III Dérivées usuellles

1 Formulaire des fonctions usuelles

f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbf{N}^\star$			
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbf{Z}_-^\star$			
$x \mapsto x^{1/n}$, n pair, $n \geqslant 2$			
$x \mapsto x^{1/n}$, n impair, $n \geqslant 3$			
$x \mapsto \sqrt{x}$			

$x \mapsto \sqrt[3]{x}$			
$x \mapsto x^\alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}$			
$x \mapsto \lvert x \rvert$			
$x \mapsto \lfloor x \rfloor$			
$x \mapsto e^x$			

$x \mapsto \ln x$			
$x \mapsto \cos x$			
$x \mapsto \sin x$			
$x \mapsto \tan x$			

• La fonction Arctan $: \mathbf{R} \to I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la bijection réciproque de la fonction $\tan : I \to \mathbf{R}$.
Or, tan est dérivable sur I de dérivée $(\tan)' : x \mapsto 1 + \tan^2(x)$, ne s'annulant pas sur I.
Ainsi, Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel x :

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan' \circ \text{Arctan}(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}. \quad \boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

2 Formulaire des composées

• Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $x \mapsto n.x^{n-1}$
Par composition, on en déduit que si u est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, alors u^n est dérivable sur $\mathbf{R}$ et :
$\forall x \in \mathbf{R}, \ \ (u^n)'(x) = (n.u(x)^{n-1}) \times u'(x)$.
On établit de cette façon les résultats suivants, pour une fonction u dérivable :

- ⋆ Pour tout entier $n \geqslant 0$, u^n est dérivable de dérivée : $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}.}$

* Pour tout entier $n < 0$, u^n est dérivable en tout point où $u \neq 0$, de dérivée : $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}.}$
* en tout point où $u > 0$, alors pour tout réel α, u^α est dérivable de dérivée : $\boxed{(u^\alpha)' = \alpha u'u^{\alpha-1}.}$

  En particulier pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, si $u > 0$, $\boxed{(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}.}$
* e^u est dérivable de dérivée : $\boxed{(e^u)' = u'e^u.}$
* en tout point où $u > 0$, alors $\ln(u)$ est dérivable de dérivée : $\boxed{(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}.}$

* $\cos(u)$, $\sin(u)$ sont dérivables de dérivées : $\boxed{(\cos(u))' = -u' \sin(u), \quad (\sin(u))' = u' \cos(u).}$
* en tout point où elle est définie, $\tan(u)$ est dérivable de dérivée : $\boxed{(\tan(u))' = \dfrac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2(u)).}$

On montre que, pour toute fonction u dérivable, $\mathrm{Arctan}(u)$ est dérivable de dérivée $\boxed{(\mathrm{Arctan}(u))' = \dfrac{u'}{1 + u^2}.}$

On considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ définie sur $I_n = \mathbf{R}$ si n est impair, et sur $I_n = \mathbf{R}_+$ si n est pair.
On sait que f_n est une bijection de I_n dans I_n, de bijection réciproque $f_n^{-1} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
Si $n \geqslant 2$, $f_n'(x) \neq 0$ si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi, f_n^{-1} est dérivable sur $I_n \setminus \{0\}$ et :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbf{R}_+^\star (\text{si } n \text{ est pair}) \\ \forall x \in \mathbf{R}^\star (\text{si } n \text{ est impair}) \end{cases} \qquad \left(f_n^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f_n' \circ f_n^{-1}(x)} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Produit de n fonctions dérivables
Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables sur I.
Alors le produit $f_1 \times \cdots \times f_n$ est dérivable sur I et on a :

$$(f_1 \times \cdots \times f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n' = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i' \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} f_k \right).$$

IV Dérivées d'ordre supérieur

1 Fonction n fois dérivable

DÉFINITION

Soit $f : D \to \mathbf{R}$. Lorsque c'est possible, on définit les dérivées successives de f par récurrence :

- On note $f^{(0)} = f$.
- Pour $n \in \mathbf{N}$, lorsque $f^{(n)}$ est dérivable, on définit $f^{(n+1)}$ par la relation :

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

$f^{(n)}$ est appelée **dérivée n-ième de f**.

Remarques :
$f^{(1)}$ est plus couramment notée f' et appelée **dérivée première** de f.
$f^{(2)}$ est plus couramment notée f'' et appelée **dérivée seconde** de f.
La notation de l'ordre de la dérivée entre parenthèses permet de ne pas confondre avec une puissance.

2 Classe de fonction

DÉFINITION

Soit $f : I \to \mathbf{R}$.

- Si f est n fois dérivable sur I, on dit que f est **de classe** $\mathcal{D}^n$ sur I.
  On note $\mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I.
- Si f est n fois dérivable sur I, et si $f^{(n)}$ est continue sur I, f est dite **de classe** $\mathcal{C}^n$ sur I.
  On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur I.
- Si f est infiniment dérivable sur I, on dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
  On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur I.

3 Cas des fonctions usuelles

Proposition

On a les résultats suivants : Si f et g sont n fois dérivables sur I, si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

- $f + g$ est n fois dérivable sur I et : $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$,
- λf est n fois dérivable sur I et : $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$,
- fg est n fois dérivable sur I.

V Théorème de Rolle et applications

1 Extrema relatifs

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur D, et soit $x_0 \in D$.
On dit que f admet en x_0 un **maximum relatif** (*resp* : **minimum relatif**) lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que :
$\forall x \in D, \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (resp : f(x) \geqslant f(x_0))$

Un **extremum relatif** désigne un maximum ou un minimum relatif.

Proposition

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que f est dérivable en x_0 et admet en x_0 un **extremum relatif**. $\boxed{\text{Alors } f'(x_0) = 0.}$

Attention ! La réciproque de cette proposition est fausse.
Exemple : Étude de $x \mapsto x^3$ en 0.

2 Théorème de Rolle

THÉORÈME THÉORÈME DE ROLLE

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Conséquence pour les racines d'une fonction dérivable :

PROPOSITION

> Soit f dérivable sur $[a,b]$, et admettant n racines distinctes sur $[a,b]$.
> Alors f' admet (au moins) $n-1$ racines sur $]a,b[$, qui séparent les racines de f.

3 Égalité des accroissements finis (TAF)

THÉORÈME THÉORÈME (ÉGALITÉ) DES ACCROISSEMENTS FINIS

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a).f'(c)$

4 Inégalité des accroissements finis (IAF)

Proposition Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
On suppose que $|f'|$ est bornée sur $]a, b[$ et on pose $M = \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|$.

Alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M.|b - a|$.

5 Variations des fonctions dérivables

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle réel I.

- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$.

- Si f' est positive sur I, et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative sur I, et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.

VI Généralisation du théorème des accroissements finis

1 Théorème de Taylor-Lagrange

Théorème **Théorème de Taylor-Lagrange**

Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

ou encore, sous forme de somme : $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.

La somme est appelée *polynôme de Taylor* et le reste est le *reste de Lagrange*.

De façon analogue, on obtient : $f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a-b)^k}{k!} f^{(k)}(b) + \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

Cas particulier sur $[0,x]$ ou $[x,0]$: Formule de Taylor-Mc Laurin

$$\boxed{\exists c \in]0,x[\text{ ou }]x,0[,\ f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).}$$

2 Applications à certaines fonctions usuelles

a La fonction exponentielle

$\exp : x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(\exp)^{(n)} = \exp$.

D'après la formule précédente, $\forall x \in \mathbf{R}^\star, \quad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$ où $c \in] - |x|, |x| [$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c = 0 \quad$ car $0 < e^c < e^{|x|}$ et par croissances comparées.

Ainsi, on peut écrire : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots}$

b Les fonctions cosinus et sinus

$\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

- si $n = 4k$ avec k un entier, $\cos^{(n)}(0) = \cos(0) = 1$;
- si $n = 4k+1$ avec k un entier, $\cos^{(n)}(0) = -\sin(0) = 0$;
- si $n = 4k+2$ avec k un entier, $\cos^{(n)}(0) = -\cos(0) = -1$;
- si $n = 4k+3$ avec k un entier, $\cos^{(n)}(0) = \sin(0) = 0$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos^{(n+1)}(c) = 0$ car $|\cos^{(n+1)}(c)| \leqslant 1$.

Ainsi, on peut écrire : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots}$

Et de façon similaire, on trouve :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots}$$