

TD 15. Géométrie : corrigé

Exercice 1

1. On procède par substitution, en exprimant le paramètre λ en fonction (par ex.) de l'ordonnée y :
 $y = 3 + \lambda$ donne $\lambda = y - 3$, qu'on remplace dans la première équation :

$$x = 1 - (y - 3), \text{ d'où } \boxed{\mathcal{D} : x + y - 4 = 0.}$$

2. Toute équation d'une droite parallèle à $\mathcal{D}$ a une équation de la forme $x + y + c = 0$, où $c \in \mathbf{R}$.
On veut que le point $B(1, 1)$ appartienne à $\mathcal{D}'$: $1 + 1 + c = 0$ donne $c = -2$.

$$\boxed{\text{La droite } \mathcal{D}' \text{ parallèle à } \mathcal{D} \text{ et passant par } B \text{ a pour équation cartésienne : } x + y - 2 = 0.}$$

3. Dans une base orthonormée du plan, un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est : $\vec{n}(1, 1)$.

Pour tout $m \in \mathbf{R}$, le vecteur $\vec{n}_m(m, 3m - 1)$ est normal à Δ_m .

On cherche les valeurs de m pour lesquelles $\vec{n}$ et $\vec{n}_m$ sont colinéaires.

D'après le critère de colinéarité, $\vec{n}$ et $\vec{n}_m$ sont colinéaires $\Leftrightarrow 1 \times (3m - 1) - 1 \times m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\Delta_m \text{ est parallèle à } \mathcal{D} \text{ si et seulement si } m = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 2

1. Soit $M(x, y)$ un point du plan. Alors $\overrightarrow{AM}(x + 1, y - 2)$ et $M \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$
 $\Leftrightarrow 1 \times (x + 1) - 4 \times (y - 2) = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{x - 4y + 9 = 0 : \mathcal{D}'}$

De plus, $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x + 1 = 4\lambda \\ y - 2 = 1 \times \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{D}' \begin{cases} x = 4\lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \end{cases}$$

2. Soit $M(x, y)$ un point du plan. Alors $\overrightarrow{BM}(x - 2, y - 1)$ et

$M \in \mathcal{D}'' \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ orthogonal à $\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \bullet \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 2) + 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{3x + y - 7 = 0 : \mathcal{D}''}$$

De plus, en posant $\vec{v}(-1, 3)$, on a $\vec{v} \bullet \vec{n} = -1 \times 3 + 3 \times 1 = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{n}$.

Ainsi, $\vec{v}$ dirige $\mathcal{D}''$ donc en procédant comme ci-dessus : $\mathcal{D}'' \begin{cases} x = -\lambda + 2 \\ y = 3\lambda + 1 \end{cases}$

3. Posons $y = 0$, il vient alors $x - 3 \times 0 + 1 = 0$, soit $x = -1$. Le point $C(-1, 0)$ appartient à $\mathcal{D}$.

De plus, $\vec{n}_2(1, -3)$ est normal à $\mathcal{D}$, donc $\vec{w}(3, 1)$ dirige $\mathcal{D}$.

En procédant comme ci-dessus : $\mathcal{D} \begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = \lambda \end{cases}$

Exercice 3

Dans un repère orthonormé de l'espace, le vecteur $\vec{n}(3, 1, -2)$ est normal à $\mathcal{P}$.

Tout plan parallèle à $\mathcal{P}$ a donc une équation cartésienne de la forme $3x + y - 2z + d = 0$.

On veut qu'il contienne le point $A(1, 2, 3)$ donc que : $3 \times 1 + 2 - 2 \times 3 + d = 0$, donc $d = 1$.

Le plan parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par A a pour équation cartésienne : $\boxed{3x + y - 2z + 1 = 0.}$

Exercice 4

1. On a immédiatement un système d'équations paramétriques de $\mathcal{P}$ compte-tenu des données de

$$\text{l'énoncé : } \mathcal{P} \begin{cases} x = 2\lambda + \mu + 1 \\ y = \lambda + 4\mu - 1 \\ z = -\lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

Le problème consiste à éliminer les paramètres λ, μ pour obtenir une équation cartésienne, c'est-à-dire à faire apparaître l'équation auxiliaire de ce système de 3 équations à 2 inconnues (λ, μ) .

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2, L_3 \leftarrow L_3 + L_2 : \begin{cases} -7\mu = x - 2y - 3 \\ \lambda + 4\mu = y + 1 \\ 5\mu = y + z + 1 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow 7L_3 + 5L_1 : \begin{cases} -7\mu = x - 2y - 3 \\ \lambda + 4\mu = y + 1 \\ 0 = 7(y + z + 1) + 5(x - 2y - 3) \end{cases}$$

Le système est compatible (λ, μ existent) si et seulement l'équation auxiliaire est vérifiée :

$$\boxed{\mathcal{P} : 5x - 3y + 7z - 8 = 0.}$$

2. $\vec{n}(5, -3, 7)$ est normal à $\mathcal{P}$, tandis que $\vec{n}'(1, 0, 0)$ est normal à $\mathcal{P}'$.

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont clairement pas colinéaires, donc $\boxed{\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P}' \text{ sont sécants, selon une droite } \mathcal{D}.}$

Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{D}$. Alors $M \in \mathcal{P}'$, donc $x = 1$, et $M \in \mathcal{P}$, donc $\exists(\lambda, \mu), \begin{cases} x = 2\lambda + \mu + 1 \\ y = \lambda + 4\mu - 1 \\ z = -\lambda + \mu \end{cases}$

On a donc $2\lambda + \mu + 1 = 1$, soit : $\mu = -2\lambda$. En remplaçant : $\mathcal{D} \begin{cases} x = 1 \\ y = -7\lambda - 1 \\ z = -3\lambda \end{cases}$

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \text{ est la droite passant par } B(1, -1, 0) \text{ et dirigée par } \vec{w}(0, -7, -3).}$$

Exercice 5

1. $\mathcal{D}$ a pour système d'équations paramétriques : $\mathcal{D} \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

Un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ contient $\mathcal{D}$ si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, a(2\lambda + 1) + b(\lambda - 1) + c(\lambda) + d = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a - b + d = 0 \end{cases}$$

En choisissant $a = 1, b = 0$, on trouve rapidement : $c = -2$ et $d = -1$, soit le plan $\mathcal{P}_1 : x - 2z - 1 = 0$.

En choisissant $a = 0, b = 1$, on trouve rapidement : $c = -1$ et $d = 1$, soit le plan $\mathcal{P}_2 : y - z + 1 = 0$.

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont clairement pas parallèles, donc ils sont sécants selon $\mathcal{D}$.

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ a pour système d'équations cartésiennes : } \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}}$$

2. Cherchons un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$: avec $z = 0$, il vient $A(2, -3, 0) \in \mathcal{D}'$.

Avec $z = 1$, $B(3, 0, 1) \in \mathcal{D}'$. Le vecteur $\vec{AB}(1, 3, 1)$ dirige $\mathcal{D}'$.

$\vec{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

Cherchons un point d'intersection à ces deux droites : $M(x, y, z) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

En substituant λ : $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad L_4 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ et } L_5 \Rightarrow \lambda = 1. \text{ Ce système est donc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$

Le point $B(3, 0, 1)$ est l'unique point commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Ces droites sont sécantes, donc coplanaires.

Le plan $\mathcal{P}$ les contenant toutes deux passe par B et est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{AB}$.

Il a pour système d'équations paramétriques $\mathcal{P} : \begin{cases} x = 2\lambda + \mu + 3 \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = \lambda + \mu + 1 \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$

Obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ revient à éliminer les paramètres λ et μ :

$L_1 - L_3 \Leftrightarrow \lambda + 2 = x - z$ donc $\lambda = x - z - 2$ et $L_1 - 2L_3 \Leftrightarrow -\mu + 1 = x - 2z$ donc $\mu = -x + 2z + 1$.

On remplace dans L_2 : $\boxed{\mathcal{P} \text{ a pour équation cartésienne } -2x - y + 5z + 1 = 0.}$

Exercice 6

Les données permettent d'écrire des systèmes d'équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$:

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = \lambda + a \\ y = \lambda + 2 \\ z = \lambda + 3 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 2\mu + b \\ y = -\mu + 1 \\ z = \mu + 4 \end{cases} \quad (\mu \in \mathbf{R})$$

$$\mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_2 \text{ concourantes (c'est-à-dire sécantes) si et seulement si : } \exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} \lambda + a = 2\mu + b \\ \lambda + 2 = -\mu + 1 \\ \lambda + 3 = \mu + 4 \end{cases}$$

Il s'agit donc de trouver l'équation auxiliaire de ce système linéaire de 3 équations à 2 inconnues (λ, μ) , selon les paramètres a, b .

$$\begin{aligned} \text{Sous forme matricielle : } & \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & -a+b \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & -a+b \\ 0 & 3 & -1+a-b \\ 0 & \boxed{1} & 1+a-b \end{array} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & -a+b \\ 0 & 0 & -4-2a+2b \\ 0 & \boxed{1} & 1+a-b \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_2 \text{ sont sécantes si et seulement si : } b - a = 2.}$$

Exercice 7

Dans un repère orthonormé, $\vec{n}(1, 1, 1)$ est normal à $\mathcal{P}$, et $\vec{n}'(1, 0, 2)$ est normal à $\mathcal{P}'$.

Un plan $\mathcal{P}''$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$ si et seulement si un de ses vecteurs normaux est orthogonal à la fois à $\vec{n}$ et à $\vec{n}'$.

$$\text{On cherche donc } \vec{n}''(a, b, c) \text{ tel que : } \begin{cases} \vec{n}'' \bullet \vec{n} = 0 \\ \vec{n}'' \bullet \vec{n}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = c \end{cases}$$

On choisit $c = 1$: $\vec{n}''(-2, 1, 1)$ est normal à $\mathcal{P}''$, donc d'équation cartésienne de la forme : $-2x + y + z + d = 0$.

On veut enfin que $A(1, 0, 0) \in \mathcal{P}''$: $-2 + d = 0$ donc $d = 2$. $\boxed{\mathcal{P}'' \text{ a pour équation cartésienne } -2x + y + z + 2 = 0.}$

Exercice 8

On se place dans un repère orthonormé du plan.

$$1. \text{ Le rayon } R \text{ de ce cercle est } \Omega B = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{L'équation cherchée est donc : } (x - (-2))^2 + (y - (-1))^2 = R^2 = 20, \text{ donc } \boxed{(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20.}$$

$$\text{En développant (peu utile ici) : } \boxed{x^2 + 4x + y^2 + 2y - 15 = 0.}$$

$$2. \text{ Soit } \mathcal{C} \text{ le cercle d'équation } x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0.$$

$$\text{On fait apparaître des identités remarquables : } x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4 \text{ et } y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1, \\ \text{donc } \mathcal{C} : (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 5 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = R^2 \text{ avec } R = 3.$$

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } \Omega(-2, 1) \text{ et de rayon } R = 3.}$$

$$3. M(x, y) \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB] \text{ si et seulement si } \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 1) + (y - 1)(y - 4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 - 6x + y^2 - 5y + 9 = 0.}$$

Exercice 9

$$1. \vec{n}(2, 3) \text{ est normal à } \mathcal{D}, \text{ donc } H(x, y) \text{ est tel que : } \begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{AH} \text{ colinéaire à } \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ x - 3 = 2\lambda \\ y - 5 = 3\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2\lambda + 3) + 3(3\lambda + 5) + 5 = 0 \\ x = 2\lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = 2\lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le projeté orthogonal } H \text{ de } A \text{ sur } \mathcal{D} \text{ a pour coordonnées } (-1, -1).}$$

$$2. \text{ La distance entre } A \text{ et } \mathcal{D} \text{ est } AH = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{16 + 36} = \boxed{2\sqrt{13}.}$$

Exercice 10

$$1. \vec{n}(2, 3, 5) \text{ est normal à } \mathcal{P}, \text{ donc } H(x, y, z) \text{ est tel que : } \begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ \overrightarrow{AH} \text{ colinéaire à } \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5z - 8 = 0 \\ x - 3 = 2\lambda \\ y - 5 = 3\lambda \\ z - 1 = 5\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2\lambda + 3) + 3(3\lambda + 5) + 5(5\lambda + 1) - 8 = 0 \\ x = 2\lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 5 \\ z = 5\lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{9}{19} \\ x = 2\lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 5 \\ z = 5\lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{39}{19} \\ y = \frac{68}{19} \\ z = -\frac{26}{19} \end{cases}$$

Le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{39}{19}, \frac{68}{19}, -\frac{26}{19}\right)$.

$$2. \text{ La distance entre } A \text{ et } \mathcal{P} \text{ est } AH = \sqrt{\left(-\frac{39}{19} - 3\right)^2 + \left(\frac{68}{19} - 5\right)^2 + \left(-\frac{26}{19} - 1\right)^2}$$

$$AH = \frac{1}{19}\sqrt{96^2 + 27^2 + 45^2} = \frac{3}{19}\sqrt{32^2 + 9^2 + 15^2} = \frac{3\sqrt{1330}}{19}.$$

Exercice 11

$$\begin{aligned} 1. & \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Soit (ABC) un triangle.

Notons D le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B : $(DA) \perp (BC)$ et $(DB) \perp (CA)$ (faire un schéma)

Ainsi : $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

D'après ce qui précède, il reste : $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

Ceci prouve que $(DC) \perp (BA)$ donc le point D appartient à la hauteur issue de C :

le point D appartient aux trois hauteurs du triangle (ABC) : ces hauteurs sont donc concourantes.