Exercice 1 . Déterminer les primitives des fonctions suivantes (primitivation "à vue")

1. $x \mapsto x^3 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x-2}$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
3. $x \mapsto xe^{x^2}$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
5. $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$
6. $x \mapsto \tan(x)$
7. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x)}$
9. $x \mapsto \sin^2(x)\cos^3(x)$

Exercice 2 . Déterminer les primitives des fonctions suivantes (primitivation par parties)

1. $x \mapsto xe^x$
2. $x \mapsto 2x\sin(x)$
3. $x \mapsto x^3\ln(x)$
4. $x \mapsto \ln(1+x^2)$
5. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$
6. $x \mapsto \cos(x)e^{2x}$

Exercice 3 . Déterminer les primitives des fonctions suivantes (changement de variable)

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}$
3. $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$
4. $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$

Exercice 4 . Déterminer les primitives des fonctions suivantes (linéarisation)

1. $x \mapsto \sin^2(x)$
2. $x \mapsto \cos^2(x)\sin^2(x)$
3. $x \mapsto \cos(3x)\sin^2(2x)$

Exercice 5 . Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^e \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 6 . On considère la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que (u_n) est une suite décroissante, en déduire que (u_n) est une suite convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 7 . *Avec des majorations.*

1. Soit g une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que (u_n) tend vers 0.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+t^n}\sin(nt)\,\mathrm{d}t$. Calculer la limite de (v_n).

Exercice 8 . On considère la fonction H définie par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de H.
2. Démontrer que H est dérivable sur $\mathcal{D} \smallsetminus \{0\}$ et déterminer H'.
3. Soit $x > 1$. Montrer que : $e^x \ln x \leqslant H(x)$.
4. En déduire la limite de H en $+\infty$.

Exercice 9 . **Lemme de Lebesgue**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

1. Rappeler pourquoi la fonction f' est bornée.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 10 . Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(a+b-x) = f(x).$$

1. Montrer que : $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 11 . *Sommes de Riemann.*

1. Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right) - \ln n.$$

2. Donner un équivalent en $+\infty$ de la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^\star, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n}\big((n+k)^3 - (n-k)^3\big).$$

Exercice 12 . Soient $p, q \in \mathbf{N}$. On pose : $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $I(q,p) = I(p,q)$.
2. Exprimer $I(p+1,q)$ à l'aide de $I(p,q+1)$.
3. Calculer $I(0,q)$. En déduire $I(p,q)$.

Exercice 13 . On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer des réels a, b et c tels que : $\forall u \neq -1,\ \dfrac{2u}{(1+u)(1+u^2)} = \dfrac{a}{1+u} + \dfrac{bu+c}{1+u^2}$.
2. Calculer I en effectuant le changement de variable $u = \tan x$.
3. Calculer $I+J$ et $I-J$. Retrouver la valeur de I.

Exercice 14 . Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$.